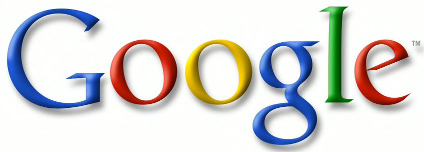
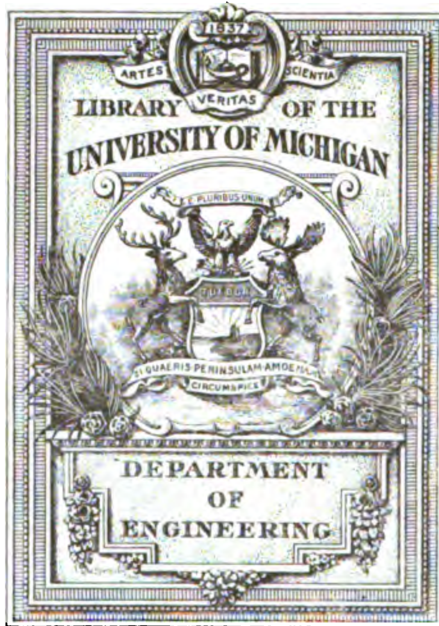

Google




1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING

LEÇONS

SUR LA

TOPOMÉTRIE

ET LA

CUBATURE DES TERRASSES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
34957 Quai des Grands-Augustins, 55.

LEÇONS

SUR LA

TOPOMÉTRIE

ET LA

CUBATURE DES TERRASSES,

COMPRENANT DES NOTIONS SOMMAIRES DE NOMOGRAPHIE,

PROFESSÉES A L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES,

PAR

Philbert **Maurice d'OCAGNE,**

Ingénieur des Ponts et Chaussées,
Chef du Service des cartes, plans et instruments de précision
du département des Travaux publics,
Répétiteur à l'École Polytechnique.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

AVERTISSEMENT.

Les Leçons que nous livrons aujourd'hui au public, après les avoir professées depuis 1896, comprennent toutes les parties de Géométrie appliquée qui interviennent dans plusieurs des branches de l'enseignement de l'École des Ponts et Chaussées (Routes, Chemins de fer, Canaux, Hydraulique agricole, ...), bien qu'elles ne soient officiellement rattachées qu'au Cours de Routes (¹). Toutes les branches de l'Art de l'Ingénieur des Ponts et Chaussées qui viennent d'être citées exigent des levers de précision; les deux premières, voire la troisième, font appel à la cubature des terrasses; la seconde exige une connaissance spéciale de la théorie des raccordements.

Toutes les questions qui se rapportent à ces divers sujets sont donc traitées dans les pages qui suivent, mais plutôt à un point de vue général. Le petit nombre des Leçons dont nous disposons (²), vu les nécessités des programmes de l'École, ne nous permettant pas d'entrer dans de grands développements, nous avons dû nous attacher à coordonner d'une façon aussi rationnelle que possible les notions principales et à mettre en évidence les idées générales grâce auxquelles, le cas échéant, nos auditeurs pourront se trouver à même d'aborder, par la suite, l'étude détaillée de telle méthode ou de tel instrument. Nous supposons, d'ailleurs, qu'ils possèdent les éléments de la théorie de la pro-

(¹) La partie technique et administrative du Cours de Routes, professée par M. l'Inspecteur général Debauve, fait l'objet d'un Ouvrage, actuellement en préparation, auquel on se reportera pour la manière pratique de procéder à l'étude d'un tracé, en s'aidant des données fournies par les méthodes géométriques développées dans les présentes Leçons.

(²) Notre enseignement oral est complété, pour les Élèves de l'École des Ponts et Chaussées, par des exercices d'application sur le terrain.

babilité des erreurs d'observation, telle qu'elle est enseignée à l'École Polytechnique.

A titre particulier, nous nous permettrons d'attirer l'attention du lecteur sur la théorie nouvelle que nous donnons pour le niveau à bulle (nos 4, 5, 6) [théorie reposant sur une propriété de la bulle établie en toute généralité et non pas seulement pour le cas où le plan moyen de cette bulle est parallèle au plan vertical contenant l'axe de rotation]; sur le développement donné à l'étude des instruments tachéométriques et, plus spécialement, à ceux de MM. Sanguet et Schrader; sur les notions relatives au Nivellement général de la France; enfin sur la théorie générale des raccordements qui, bien que sous une forme résumée, est assez poussée au point de vue mathématique.

Les applications de la Nomographie au calcul des profils de remblai et de déblai nous ont, en outre, amené, en raison des nombreuses applications dont cette théorie est susceptible à toutes les branches de l'Art de l'Ingénieur, à en donner, sous forme d'Annexe, un exposé sommaire englobant les principes de l'usage le plus courant dans la pratique.

LEÇONS

SUR LA

TOPOMÉTRIE

ET LA

CUBATURE DES TERRASSES.

PREMIÈRE PARTIE.

TOPOMÉTRIE,

---

1. *But de la Topométrie.* — La *Topométrie* (1) est l'art de relever par des mesures géométriques, pour les figurer sur un plan, les dispositions d'un terrain limité à une aire assez petite pour qu'il ne soit pas nécessaire, sur son étendue, de tenir compte de la courbure de l'écorce terrestre. Lorsque la considération de cette courbure intervient on entre dans le domaine de la *Géodésie*.

Pour définir la surface du terrain on a recours : 1° aux projections horizontales d'un nombre suffisant de ses points ; 2° aux cotes de ces points prises au-dessus d'un plan horizontal convenablement choisi. La construction de la projection horizontale exige des mesures d'angles et de longueurs ; l'ensemble des méthodes appropriées à cette fin constitue l'objet de la *planimétrie ;* la détermination des cotes, celui de l'*altimétrie* (2).

---

(1) Avec le colonel Goulier (*Études théoriques et pratiques sur les levers topométriques...*; Gauthier-Villars, 1892) nous établissons une distinction entre la *Topographie générale* et la *Topométrie* qui en constitue la partie plus spécialement géométrique.

(2) C'est là le terme le plus habituellement employé en France. Celui d'*hypsométrie,* d'un usage moins général, est pourtant plus correct.

Si l'on ne possédait que des instruments de mesure d'angles sans pouvoir évaluer les longueurs, il serait facile, on le reconnaît sans peine, de construire une figure semblable à la projection horizontale du terrain à relever, mais sans y mettre l'échelle. Bien donc que dans la plupart des méthodes employées en planimétrie les deux opérations se poursuivent concurremment nous envisagerons d'abord la *mesure des angles* qui définit, en quelque sorte, la *similitude* de la projection horizontale, puis la *mesure des distances*, qui définit sa *grandeur*.

Nous débuterons par quelques indications sur les organes principaux des instruments (1).

---

(1) Dans le Traité de *Topographie* qu'il a écrit pour la *Bibliothèque du Conducteur de Travaux publics*, M. Prévot, conducteur des Ponts et Chaussées, attaché au Service du Nivellement général de la France, a bien voulu, sur le conseil qu'il nous en avait demandé, adopter l'ordre même de nos Leçons. Il sera donc facile au lecteur des présentes Leçons de se reporter à cet excellent Ouvrage pour les détails relatifs aux dispositions pratiques, à la rectification et au mode d'emploi des instruments dont nous ne donnons ici qu'une description rapide, nous attachant seulement à mettre en relief les idées essentielles.

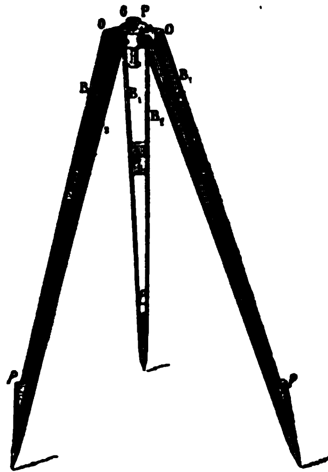
On trouvera d'ailleurs un historique très savant et très développé du sujet qui nous occupe dans les *Recherches sur les instruments, les méthodes et le dessin topographiques* du colonel Laussedat, parues en 2 volumes chez Gauthier-Villars (1898-1903).

CHAPITRE I.

ORGANES PRINCIPAUX DES INSTRUMENTS.

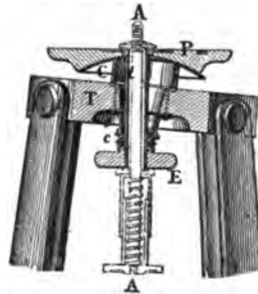
2. *Supports.* — Les supports peuvent se réduire à un simple bâton fiché en terre sur lequel certains instruments reposent par l'intermédiaire d'une douille. Mais le plus souvent ce sont des trépieds dont chaque pied, terminé par une pointe, est muni d'une pédale qui en facilite l'enfoncement (*fig.* 1). Afin d'amener plus facilement à l'horizontalité le plateau sur lequel repose l'instrument, quel que soit l'enfoncement des trois pieds, on a parfois recours au dispositif à calotte sphérique (*fig.* 2). En général, un évidement taraudé dans l'embase de l'instrument reçoit une tige filetée sollicitée par un ressort placé dans un corps de pompe qui est fixé au support, de façon à immobiliser l'instrument.

Fig. 1.



Afin qu'il soit possible, une fois la mise en place effectuée, d'amener exactement le centre de l'instrument à l'aplomb d'un point

Fig. 2.



donné, le plateau est combiné de façon à pouvoir recevoir un mouvement de translation par rapport au trépied.

3. *Vis.* — L'embase de l'instrument repose sur le plateau dont il vient d'être question par l'intermédiaire de trois *vis calantes* permettant d'assurer la verticalité de son axe principal de rotation suivant le procédé qui sera indiqué plus loin.

Les *vis de pression* permettent de solidariser temporairement les unes avec les autres diverses parties de l'instrument qui, par construction, sont mobiles les unes par rapport aux autres.

Les *vis de rappel* ont pour objet, lorsque deux parties d'un instrument ont été rendues solidaires au moyen d'une vis de pression, de permettre d'imprimer à l'une de ces parties, qui porte la vis de rappel, un très petit déplacement par rapport à l'autre qui porte son écrou [1].

Les *vis de réglage* permettent de modifier légèrement la situation relative de deux organes de l'instrument, destinés à rester fixes l'un par rapport à l'autre, en vue d'assurer la réalisation aussi rigoureuse que possible de certaines conditions géométriques.

4. *Niveau à bulle* ou *nivelle* [2]. — Le niveau à bulle se compose

---

[1] Il faut éviter de pousser une vis de rappel jusqu'au bout de sa course. Aussi, après plusieurs rotations successives de même sens, doit-on avoir soin de la ramener en arrière d'une quantité à peu près équivalente avant de s'en servir de nouveau.

[2] Le nom de *nivelle*, donné par le colonel Goulier à l'instrument communément

essentiellement d'un tube soigneusement rodé en forme de tore de grand rayon (20^m à 30^m, parfois 50^m, dans les bons instruments de topométrie; jusqu'à 100^m dans les instruments d'astronomie) dans lequel on a enfermé de l'éther liquide avec une petite masse gazeuse, la bulle. Les déplacements de cette bulle se lisent sur une échelle graduée que porte la partie supérieure du tube, et dont le zéro, placé dans la partie médiane, sert d'origine à deux graduations disposées symétriquement de part et d'autre. On appelle *lecture* de la bulle la moyenne des lectures faites en ses extrémités ([1]). Quand cette lecture est zéro, c'est-à-dire quand le milieu de la bulle est au zéro commun des deux graduations, on dit aussi que la bulle est *entre ses repères*.

Dans les instruments topométriques, le niveau à bulle est surtout appliqué à la rectification des axes verticaux. L'axe fait corps avec un bâti reposant sur son support par l'intermédiaire de trois vis calantes. A ce bâti est fixé le niveau invariablement lié, par conséquent, à l'axe, mais pouvant, grâce à une vis de réglage, être mis, relativement à cet axe, dans la position requise pour l'application du mode de rectification tel qu'il va être indiqué. Afin de rendre plus précis le principe sur lequel repose ce mode de rectification, nous aurons recours à un mode spécial de représentation géométrique ([2]).

5. *Réglage du niveau.* — Appelant *cercle moyen* du niveau le grand cercle d'équateur du tore auquel appartient la fiole de ce niveau, considérons une sphère de centre C (*fig.* 3) ayant même rayon que ce cercle. Menons par le centre C la verticale CZ, la parallèle CA à l'axe qu'il s'agit de rectifier, et enfin un plan parallèle au *plan moyen* du niveau (plan de son équateur), qui contiendra la droite CA, si *le*

---

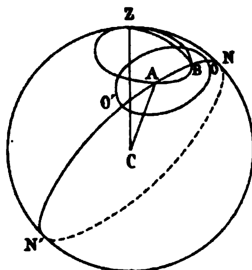
appelé *niveau à bulle*, est entré dans les habitudes courantes du langage, au Service du Nivellement général de la France. Il a l'avantage d'éviter le double emploi, avec le nom de *niveau* donné aux instruments munis de nivelles, qui permettent la mesure des altitudes. Pourtant le nom de *niveau à bulle* reste de beaucoup le plus usité.

([1]) Il va sans dire que les cotes de l'une des deux échelles doivent être affectées du signe +, les autres du signe —. On peut, en outre, au lieu de confondre les zéros de ces deux échelles au point médian, les écarter de part et d'autre de ce point d'une même quantité. La moyenne des lectures aux extrémités de la bulle, que l'on suppose dépasser de part et d'autre l'intervalle non gradué, reste la même lorsqu'on tient compte des signes.

([2]) Nous avons, pour la première fois, développé cette théorie géométrique dans le *Bulletin astronomique*, t. XX, 1903, p. 51.

plan moyen est, par construction, parallèle à l'axe; ce plan coupera la sphère suivant un grand cercle NAN′, égal et parallèle au cercle

Fig. 3.

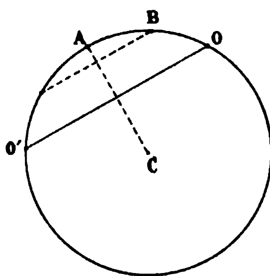


moyen du niveau, et sur lequel le zéro de la graduation sera marqué en O. L'arc AO est dit *l'écart du zéro*. Le niveau est réglé lorsque cet écart est nul.

Voyons d'abord comment ce réglage peut être obtenu :

Lorsqu'on fait tourner le niveau autour de l'axe à rectifier, le cercle AN tourne sur la sphère autour du point A et le zéro O décrit un petit cercle OO′ de pôle A. Pour chaque position du cercle AN la position du point B correspondant au milieu de la bulle, c'est-à-dire *le point le plus haut* sur ce cercle, s'obtient en abaissant de Z sur AN le grand cercle orthogonal ZB. Le lieu du point B est donc une biquadratique sphérique (B) passant par A et Z et *symétrique* par rapport au plan ACZ. Pour deux positions directement oppo-

Fig. 4.



sées AN et AN′ du cercle moyen, alors que les positions O et O′ du zéro sont symétriques par rapport à A, la position B de la bulle est la même.

La lecture de la bulle (moyenne de celles qui seraient faites aux extrémités de la bulle sur le niveau) est proportionnelle à l'arc OB du cercle AN, compté, avec son signe, à partir du zéro O jusqu'à la bulle B, le sens positif étant, par exemple, celui de O vers A. Dans la position AON, la lecture de la bulle est $l = + \mathrm{OB}$; et dans la position AO'N' (le sens positif étant devenu dans le retournement celui de O' vers A) $l' = + \mathrm{O'B}$. On a, par suite, A étant le milieu de OO' (*fig.* 4) ([1]),

$$\mathrm{AB} = \frac{\mathrm{O'B} - \mathrm{OB}}{2} = \frac{l' - l}{2}.$$

Imaginons donc que l'on fasse tourner le cercle moyen sur lui-même (mouvement que l'on produit au moyen de la vis de réglage du niveau) jusqu'à ce que le zéro O' soit venu au point A, auquel cas (l'écart du zéro étant annulé) le niveau est réglé; la lecture λ de la bulle restée en B sera alors donnée précisément par AB, et l'on a, d'après la formule précédente,

$$\lambda = \frac{l' - l}{2}.$$

De là, le procédé employé pour le *réglage du niveau.*

Puisque la position initiale est quelconque, plaçons le niveau parallèlement à la ligne de deux des vis calantes et, en agissant sur ces vis simultanément et en sens contraire, amenons la bulle entre ses repères (ce qui revient à faire $l = 0$) ([2]).

Faisons maintenant tourner le niveau d'une demi-circonférence autour de l'axe. D'après ce qui vient d'être vu, si la lecture de la bulle est alors l', il suffit, pour régler le niveau, d'amener la bulle, au moyen de la vis de réglage, à la lecture $\frac{l'}{2}$.

6. *Rectification de l'axe auquel est lié le niveau.* — Le niveau étant ainsi réglé, c'est-à-dire le zéro O, sur l'image sphérique, coïn-

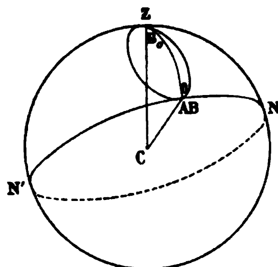
---

([1]) Si le point O était entre A et B, on aurait $\mathrm{AB} = \frac{\mathrm{O'B} + \mathrm{OB}}{2}$. Mais, dans ce cas, d'après la convention faite, il faudrait prendre $l = -\mathrm{OB}$, et le résultat serait le même.

([2]) Lorsque la lecture initiale de la bulle est nulle, c'est que, sur la représentation sphérique donnée par la figure 3, les points O et B coïncident ou, en d'autres termes, que le petit cercle OO' et la courbe (B) se coupent sur le grand cercle AN.

cidant avec le point A, si le point B est amené en coïncidence avec O (c'est-à-dire si la bulle est mise entre ses repères au moyen des vis calantes), les points A et B sont confondus et le cercle AN est tangent en A à la courbe (B) que décrit l'image de la bulle (*fig.* 5).

Fig. 5.



Dès lors si, à partir de cette position, on fait tourner le cercle AN (c'est-à-dire le niveau autour de l'axe à rectifier) d'un angle droit, il vient se placer dans le plan de symétrie de (B), qui est perpendiculaire à la tangente en A à cette courbe, et prend, par suite, la position AZ; la bulle vient donc, en B_0, se confondre avec le point le plus haut Z. Si alors, au moyen de la troisième vis calante, on fait basculer l'axe CA dans le vertical CAZ jusqu'à ce que le zéro O (confondu par le réglage avec A) vienne coïncider avec la bulle B_0, l'axe CA vient s'appliquer sur la verticale CZ.

Pour mettre en coïncidence la bulle et le zéro dans la position initiale AN, il suffit, une fois le réglage effectué, de placer le niveau parallèlement à la ligne de deux des vis calantes, et de mettre, au moyen de ces vis, la bulle entre ses repères. On fait alors tourner le niveau d'un droit en l'amenant, par rotation autour de l'axe, à être parallèle à la ligne abaissée du pied de la troisième vis perpendiculairement à la ligne qui joint les pieds des deux premières. Et, dans cette position (qui correspond à l'image AZ), on amène le zéro en coïncidence avec la bulle en mettant celle-ci entre ses repères au moyen de la troisième vis.

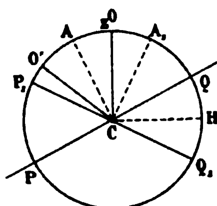
Remarque I. — Lorsqu'on suppose le plan moyen du niveau parallèle au vertical de l'axe [ce qui correspond, sur la représentation sphérique, à la position AZ (*fig.* 5)], on voit immédiatement que, si l'on déplace l'axe CA dans ce plan vertical, la différence des

lectures de la bulle qui reste, en B_0, confondue avec Z, mesure la variation de l'inclinaison de l'axe.

Dans le procédé classique pour établir le réglage du niveau, on se place dans cette hypothèse dont la démonstration ci-dessus donnée est affranchie.

Remarque II. — Un niveau étant placé sur une ligne inclinée PQ de façon que son plan moyen coïncide avec le vertical de cette ligne, et la bulle étant amenée entre ses repères, ce qui revient, sur l'image sphérique, à faire coïncider le point O avec le point Z (*fig.* 6), on

Fig. 6.



voit que si l'on retourne le niveau bout pour bout, ce qui revient, sur l'image sphérique, à amener le point O dans la position O' symétrique de Z par rapport à la perpendiculaire CA à PQ, la lecture de la bulle mesure alors l'angle O'CZ, double de l'angle HCQ que la ligne PQ fait avec l'horizon. Si donc on fait varier l'inclinaison de la ligne PQ jusqu'à ce que la bulle soit revenue entre ses repères, c'est-à-dire jusqu'à ce que CO' soit venu sur CZ, le rayon CA sera venu dans la position CA_1 symétrique par rapport à CZ, et PQ dans la position P_1Q_1 symétrique par rapport à l'horizontale CH.

7. *Manière pratique d'opérer avec le niveau.* — Dans la pratique, les conditions théoriques que nous avons supposées remplies (exact rodage de la fiole; parallélisme de son plan d'équateur et de l'axe principal, etc.) ne sont pas rigoureusement atteintes. Il s'ensuit que le procédé théorique ci-dessus décrit ne réussit (et même, le plus souvent, seulement après plusieurs reprises) que si l'écart initial à corriger est assez faible (1).

(1) Sur l'emploi du niveau pour les opérations de haute précision, on peut consulter l'*Etude sur le niveau à bulle*, de M. Gœdseels, administrateur-inspecteur de l'Observatoire de Belgique (Bruxelles; 1900).

On assure cette condition en se servant, avant toute opération, du niveau *comme s'il était réglé* pour placer l'axe verticalement.

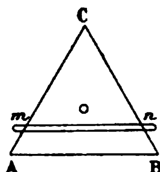
En fait, son dérèglement est toujours assez faible, et l'on ne commet ainsi qu'une erreur à peu près négligeable.

L'absence de cette précaution, dont se dispensent la plupart des opérateurs peu expérimentés, a souvent pour effet d'augmenter le dérèglement que l'on se propose de détruire.

En résumé le mode pratique d'opérer peut se scinder en trois opérations :

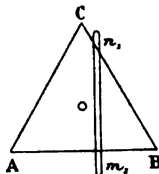
1° *Calage approximatif de l'instrument.* — Se servant du niveau *comme s'il était réglé,* on le place d'abord en *mn* parallèlement à la ligne joignant deux des vis calantes A et B (*fig.* 7) et

Fig. 7.



l'on tourne ces deux vis en sens contraire de façon à amener la bulle entre ses repères ([1]); puis on place le niveau perpendiculairement

Fig. 8.

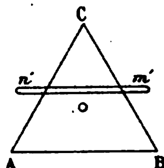


à AB (*fig.* 8) et l'on agit sur la vis C de façon à amener encore la bulle entre ses repères.

([1]) Pour savoir dans quel sens il faut faire tourner les vis A et B il suffit de se rappeler que la bulle se dirige du côté de celle des vis calantes que l'on visse (c'est-à-dire qu'on fait tourner de gauche à droite). Le sens de ce relèvement est inverse avec la vis de réglage du niveau.

2° *Réglage du niveau* [1]. — Ayant ramené le niveau dans la position mn (*fig.* 7) on agit encore sur les vis A et B pour mettre la bulle entre ses repères, puis on fait tourner le niveau de 180° autour de l'axe O, ce qui lui donne la position $m'n'$ (*fig.* 9); on corrige la

Fig. 9.



moitié du déplacement de la bulle au moyen de la vis de réglage du niveau.

3° *Rectification de l'axe.* — On ramène la bulle de la seconde moitié de son déplacement en agissant sur les vis A et B, puis on place le niveau en $m_1 n_1$ (*fig.* 8) perpendiculairement à la ligne AB et l'on agit sur la vis C de façon à ramener la bulle entre ses repères.

Lorsque l'axe est suffisamment rectifié, la bulle ne s'écarte pas sensiblement de ses repères dans un tour complet du niveau autour de cet axe.

8. *Viseurs.* — Pour les visées sur des objets rapprochés on se sert, en général, de deux pinnules percées l'une d'une fente très mince contre laquelle on applique l'œil, l'autre d'une fenêtre dans l'axe de laquelle, parallèlement à la fente de la première, est tendu un crin très fin. Cette fente et ce crin déterminent le plan de visée.

D'après le colonel Goulier, la visée par bissection à travers deux fentes opposées donne une erreur de pointé moitié moindre.

Dans les instruments plus précis, le viseur est une lunette astronomique. Le plan de visée est celui qu'engendre l'axe optique de cette lunette lorsqu'elle tourne sur ses tourillons.

Il faut avoir soin, avant de se servir de la lunette, de la mettre exactement au point. On commence par mettre l'oculaire au point sur les

---

(1) Dans la pratique courante le réglage du niveau ne s'effectue pas en toutes les stations, mais seulement de temps en temps, par exemple au début d'une série continue de stations, de sorte que, en général, on se borne, en se mettant en station, à effectuer la première des trois opérations ici décrites.

fils du réticule, en dirigeant la lunette sur un fond uni et clair, et agissant sur le porte-oculaire jusqu'à ce que les fils du réticule donnent une image bien nette. On met ensuite au point pour l'objectif en visant un objet offrant des détails précis, une mire par exemple, et agissant sur la crémaillère du porte-réticule jusqu'à ce que l'image ait atteint son maximum de netteté.

La façon la plus rigoureuse de s'assurer que le réticule et l'image de l'objet visé, fournie par l'objectif, coïncident aussi parfaitement que possible consiste à abaisser l'œil devant l'oculaire et à observer s'il n'y a pas de parallaxe dans ce déplacement. Suivant le sens de cette parallaxe on se rend compte s'il faut enfoncer ou retirer l'oculaire.

9. *Division des cercles.* — Jusqu'au siècle dernier on ne s'est servi que de la division sexagésimale dans laquelle la circonférence est fractionnée en 360 parties égales nommées *degrés*, puis en soixantièmes de degré ou *minutes* et soixantièmes de minute ou *secondes*.

Lors de la création du système métrique, le principe de la division centésimale fut admis pour les angles. Dans ce système, chacun des quatre quadrants de la circonférence est divisé en cent *grades*, subdivisés eux-mêmes en *décigrades*, *centigrades*, *milligrades*, *décimilligrades* (¹), etc. Les calculs de la *Mécanique céleste* de Laplace et ceux de la triangulation de la France sont tous effectués avec cette unité angulaire. Mais l'existence des anciennes Tables trigonométriques, particulièrement de celles qui sont entre les mains des navigateurs, a fait obstacle à la généralisation de la réforme dans la pratique et l'on continue à fabriquer des instruments à division sexagésimale. Aujourd'hui, le public dispose d'excellentes Tables trigonométriques (²) fondées sur la division centésimale de la circonférence; aussi les instruments en usage dans les grands services géodésiques ou topographiques (Armée, Cadastre, Nivellement général) sont-ils gradués d'après le système centésimal.

Quelle que soit l'unité employée, les angles sont comptés positivement dans le sens *direct*, c'est-à-dire contraire à celui dans lequel se meuvent les aiguilles d'une montre, qui est dit *rétrograde*.

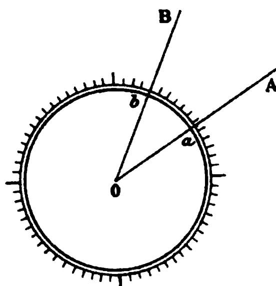
(¹) On donne aussi aux *centigrades* et *décimilligrades* les noms respectifs de *minutes centésimales* et de *secondes centésimales*.

(²) Le Service géographique de l'Armée a publié des Tables à 5 décimales pour les usages courants de la Topométrie et de grandes Tables à 8 décimales pour les calculs de haute précision. Les Tables de M. Sanguet, d'un format commode, et qui sont aussi

10. *Limbe et alidade.* — Tout instrument de mesure d'angles ou *goniomètre* peut être réduit schématiquement aux organes suivants : deux parties mobiles l'une par rapport à l'autre, autour d'un axe commun, et mises en contact le long d'un cercle décrit autour de cet axe. L'une de ces parties, appelée *alidade*, porte un *viseur* déterminant soit une ligne de visée perpendiculaire à l'axe commun, soit un plan de visée passant par cet axe; c'est cetté alidade que l'on déplace de façon à faire passer la ligne ou le plan de visée successivement par les divers points à relever; l'autre partie, laissée fixe pendant l'opération, est le *limbe* ([1]).

L'appareil étant en station en un point O, si l'on vise successivement deux points A et B (*fig.* 10), l'angle des droites OA et OB sera

Fig. 10.



mesuré par l'arc *ab*, compris entre les deux positions O*a* et O*b* du plan de visée, sur le cercle suivant lequel le limbe et l'alidade sont en contact.

Pour permettre l'évaluation de cet arc le cercle est muni, sur l'une ou l'autre des parties en contact, d'une graduation en degrés ou en grades, tandis que l'autre partie porte un index au droit duquel se fait la lecture. Le plus souvent la graduation est portée par le limbe, et l'index par l'alidade. Il suffit alors de lire la division du limbe qui est en face

---

à 5 décimales, contiennent, en outre, une foule de renseignements mathématiques et astronomiques des plus précieux ainsi qu'un grand nombre de problèmes numériques, complètement traités, qui peuvent être d'un grand secours, à titre d'exemples, pour les calculateurs peu expérimentés.

Toutes ces Tables sont en vente à la librairie Gauthier-Villars.

([1]) On remarquera que nous employons ici les termes de *limbe* et d'*alidade* dans un sens plus général que d'ordinaire afin de réduire à un type schématique unique tous les goniomètres décrits plus loin (*voir* notamment n° 20).

de l'index, dans les deux positions de l'alidade et de faire la différence des deux lectures pour avoir l'angle cherché.

Si la seconde lecture se trouvait alors plus petite que la première qui doit en être retranchée, il suffirait d'y ajouter une circonférence entière : soit, suivant le cas, 360° ou 400ᴳ.

Parfois la disposition est inverse, c'est-à-dire que la graduation est portée par l'alidade et l'index par le limbe; la lecture se fera encore de la même façon, mais les angles devant toujours être comptés dans le sens direct, la chiffraison portée par l'alidade sera dans ce cas établie dans le sens rétrograde.

D'ailleurs, afin d'éviter la différence à effectuer entre les deux lectures, l'instrument est généralement disposé de telle sorte qu'on puisse très aisément faire correspondre le zéro de la graduation à la visée initiale. A cet effet, ou bien le limbe est muni d'une ligne de visée spéciale correspondant à son zéro et que l'on peut diriger sur le premier point, ou bien il peut être rendu temporairement mobile par rapport à l'embase de l'instrument, et solidarisé, au contraire, avec l'alidade de façon à être entraîné avec celle-ci, une fois l'index mis au zéro, lors de la visée sur le premier point.

11. *Vernier.* — L'index où se fait la lecture ne tombe généralement pas juste en face d'un trait de la graduation. Il s'agit alors d'évaluer, avec une certaine approximation, l'écart existant entre cet index et le trait qui le précède immédiatement sur la graduation. Le dispositif employé le plus communément à cet effet, dans les instruments topométriques, est le *vernier* [1]. Son principe est le suivant : à partir de l'index où se fait la lecture, on a pris sur l'alidade un arc égal à $n-1$ des plus petites divisions du limbe et l'on a divisé cet arc en n parties égales; dès lors, si le trait p du vernier coïncide avec un trait du limbe, la fraction de division comprise entre l'index et le trait du limbe qui le précède immédiatement, fraction que l'on appelle l'*appoint* de la lecture, est $\frac{p}{n}$.

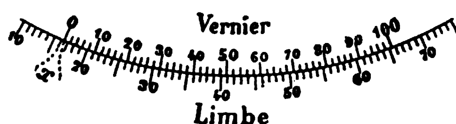
La figure 11 montre notamment un vernier au $\frac{1}{50}$ mobile le long d'un limbe gradué en grades. Le vernier donne donc directement le double-centigrade, et le centigrade à l'estime. Sa chiffraison est d'ailleurs faite pour les centigrades. Pour la position représentée sur la figure, on lirait $16^G,32$.

---

(1) Du nom de son inventeur, géomètre franc-comtois (1630).

Si l'appoint n'est pas un nombre exact de $\frac{1}{n}$, il n'y aura pas un seul trait du vernier en coïncidence exacte avec un trait du limbe, mais il y aura une division du vernier, limitée aux traits p et $p+1$, qui sera tout entière comprise à l'intérieur d'une division du limbe. L'appoint sera alors compris entre $\frac{p}{n}$ et $\frac{p+1}{n}$. Pour l'évaluer d'une façon plus approchée, il faut, entre les traits marqués sur le vernier et sur le limbe, en intercaler d'autres par la pensée et chercher à se figurer celui

Fig. 11.



d'entre eux pour lequel a lieu la coïncidence. Avec un peu d'habitude, un bon observateur arrive à évaluer ainsi le $\frac{1}{5}$ des intervalles du vernier. Pour faciliter la lecture on peut alors quintupler les chiffres inscrits sur le vernier. Pour la coïncidence du trait p, on lira ainsi $\frac{5p}{5n}$, pour celle du trait $p+1$, $\frac{5(p+1)}{5n}$, et dans l'intervalle, par estime, $\frac{5p+1}{5n}$, $\frac{5p+2}{5n}$, $\frac{5p+3}{5n}$, $\frac{5p+4}{5n}$.

M. Sanguet a imaginé, pour le cas où l'on procède à une telle interpolation à vue, un dispositif fort ingénieux permettant d'obtenir une vérification immédiate de la lecture effectuée. Ce dispositif, qu'il a adapté à son tachéomètre autoréducteur (n° 35), est celui des *verniers complémentaires*.

Imaginons que l'alidade porte deux verniers dont les origines soient distantes d'un arc arbitraire pris généralement égal à 15^G et qui soient établis l'un au $\frac{1}{9}$, l'autre au $\frac{1}{11}$, mais à chiffraison quintuplée, c'est-à-dire donnant par estime l'un le $\frac{1}{45}$ de grade, l'autre le $\frac{1}{55}$. Si les lectures à ces deux verniers sont respectivement x_1 et x_2, on a pour l'appoint a :

$$a = \frac{x_1^G}{45} = \frac{x_2^G}{55} = \frac{(x_1+x_2)^G}{100} = (x_1+x_2)^{cG}.$$

Il suffit donc de faire la somme des lectures pour avoir le nombre des centigrades de l'appoint.

Voici maintenant la vérification. On a :

$$x_1 = 0{,}45\,(x_1 + x_2),$$
$$x_2 = 0{,}55\,(x_1 + x_2).$$

Donc

$$x_2 - x_1 = 0{,}1\,(x_1 + x_2).$$

Par suite, si les deux lectures de vernier ont été correctes, leur différence doit être précisément égale au $\frac{1}{10}$ de leur somme.

Dans ces derniers temps, M. l'Ingénieur en chef des Mines Lallemand a proposé la suppression du vernier, l'évaluation de l'appoint pour chaque lecture étant faite au $\frac{1}{10}$ par la simple estime, moyennant le grossissement obtenu par un microscope disposé à cet effet.

12. *Erreurs systématiques. Leur élimination par les lectures multiples. Verniers opposés.* — La figuration schématique qui vient d'être donnée du procédé général employé pour la mesure des angles suppose d'une part que le limbe et l'alidade sont exactement centrés l'un sur l'autre; d'autre part que la division du cercle gradué est parfaitement régulière. S'il n'en est pas ainsi, on démontre que chaque lecture u est entachée d'une erreur ε développable en série de Fourier de la forme :

$$(1)\qquad \varepsilon = a_1 \sin(u + c_1) + a_2 \sin(2u + c_2) + \ldots + a_n \sin(nu + c_n) + \ldots,$$

les coefficients a_i étant des quantités très petites, de l'ordre de petitesse marqué par leur indice.

Cela dit, supposons que l'alidade, au lieu d'un seul index, en porte p placés *aux sommets d'un polygone régulier*. Si u_k et u'_k sont les lectures initiale et finale faites à l'un quelconque des p index et si ω est l'angle mesuré, on a, en supposant que les erreurs qui viennent d'être définies n'existent pas :

$$(2)\qquad \omega = u'_k - u_k,$$

et, par suite, aussi en étendant le signe Σ aux p index :

$$(3)\qquad \omega = \frac{\Sigma u'}{p} - \frac{\Sigma u}{p}.$$

Si, maintenant, nous tenons compte des erreurs systématiques, nous allons voir que, *chacune des lectures étant entachée d'une*

erreur du 1er *ordre, leur moyenne n'est entachée que d'une erreur du* $p^{ième}$ *ordre.*

Le terme général du développement de cette erreur est, en vertu de (1),

$$T_n = \frac{a_n}{p} \sum_{k=1}^{k=p} \sin(nu_k + c_n)$$

où

$$u_k = u_1 + \frac{(k-1)2\pi}{p},$$

somme des sinus de p arcs en progression arithmétique dont le premier est $nu_1 + c_n$ et la raison $\frac{2n\pi}{p}$.

On a donc, pour ce terme général, en vertu d'une formule bien connue,

$$T_n = \frac{a_n}{p} \sin\left[nu_1 + c_n + \frac{(p-1)n\pi}{p}\right] \frac{\sin n\pi}{\sin \frac{n\pi}{p}},$$

et l'on voit que ce terme général est nul sauf lorsque n est égal à p ou à un multiple de p. Le premier terme non nul du développement de l'erreur sur la moyenne est donc le $p^{ième}$, qui est de l'ordre p de petitesse.

Donc, alors qu'en l'absence de toute erreur systématique les formules (2) et (3) sont rigoureusement équivalentes, elles cessent de l'être lorsque interviennent de telles erreurs : ces erreurs sont, en effet, du premier ordre avec la formule (2) et du $p^{ième}$ ordre seulement avec la formule (3).

Il suffit de savoir, pour l'opération qu'on a en vue, à partir de quel ordre elles peuvent être considérées comme négligeables. Cet ordre, qui est le sixième pour l'Astronomie de position et le quatrième pour la Géodésie, peut être abaissé au deuxième pour les opérations courantes de la Topométrie, ce qui conduit à l'emploi de deux index diamétralement opposés, munis chacun d'un vernier; aussi dit-on dans ce cas que l'instrument est à *verniers opposés.*

La lecture correspondant à chaque visée est alors la moyenne des lectures faites aux deux verniers opposés. Remarquons d'ailleurs qu'il suffit de lire sur le limbe le trait qui précède le zéro d'un seul des deux verniers que nous appellerons le premier vernier.

En effet, lors de la première visée, on a, en appelant t le trait qui

précède le zéro du premier vernier, α et α_1 les appoints lus sur les deux verniers

$$u = t + \alpha,$$
$$u_1 = t + 200^G + \alpha_1.$$

De même, pour la seconde visée,

$$u' = t' + \alpha',$$
$$u'_1 = t' + 200^G + \alpha'_1.$$

La formule (3) donne donc, dans ce cas,

$$\omega = t' + \frac{\alpha' + \alpha'_1}{2} - \left(t + \frac{\alpha + \alpha_1}{2}\right),$$

ce qui montre que la lecture correspondant à chaque visée peut être réduite à celle qui est faite au trait du limbe précédant immédiatement le zéro du premier vernier, augmentée de la moyenne des appoints lus sur les deux verniers.

13. *Méthode de la réitération.* — Bien que, nous le répétons, la précision donnée par l'emploi de deux verniers opposés soit largement suffisante pour les besoins courants de la Topométrie, il n'est pas inutile d'indiquer comment, le cas échéant, la méthode de la réitération permet d'accroître cette précision.

Supposons la graduation liée à un dispositif qui permette de faire correspondre à la première visée une lecture sur le limbe fixée d'avance. S'il en est ainsi, réitérons r fois les deux visées nécessitées par la mesure de l'angle, en plaçant successivement le zéro du premier vernier en contact avec les traits $0, \frac{\pi}{r}, \frac{2\pi}{r}, \ldots, \frac{(r-1)\pi}{r}$ du limbe. Si nous prenons ensuite la moyenne des r déterminations ainsi faites, il est clair que cela revient au même que si nous n'avions mesuré l'angle qu'une fois en prenant pour lecture correspondant à chaque visée la moyenne de celles qui sont faites aux r positions qui viennent d'être définies des deux verniers, c'est-à-dire aux $2r$ *sommets d'un polygone régulier*. Dès lors, l'erreur systématique, d'après ce qui vient d'être vu, est réduite à l'ordre $2r$.

En particulier, si l'on fait une double opération, en plaçant le zéro du vernier pour la première visée successivement en face du trait 0 et du trait $\frac{\pi}{2}$, on a une précision du quatrième ordre.

On voit d'ailleurs, comme précédemment, qu'il suffit de lire le trait du limbe qui correspond au zéro du premier vernier dans sa position initiale pour l'une et l'autre visée. Ce trait est o pour la première visée, t' pour la seconde. Si donc α et α' représentent respectivement les lectures faites à l'une quelconque des positions des verniers pour la première et pour la seconde visée, on a

$$\omega = t' + \frac{\Sigma\alpha'}{2r} - \frac{\Sigma\alpha}{2r}.$$

Quant au mode opératoire qui permet d'effectuer cette réitération, il varie selon le dispositif de l'instrument qu'on a entre les mains.

Le dispositif le plus simple est celui qui consiste à permettre au limbe gradué de tourner autour de l'axe alors que, la ligne de visée restant fixée sur le même point, l'alidade qui en est solidaire et, par suite, l'index où se fait la lecture restent immobiles. Lorsque l'instrument est disposé de la sorte, il est dit *réitérateur*. Tel est le cas de la plupart des instruments géodésiques, mais non des instruments topométriques. En revanche, nombre de ces derniers, dits *répétiteurs*, sont construits de telle sorte que le limbe puisse être rendu mobile autour de l'axe principal (par desserrage d'une vis de pression P), tout en étant rendu solidaire de l'alidade (par serrage d'une autre vis de pression P_1). Voici alors comment on peut réaliser une réitération :

La vis P étant serrée, P_1 desserrée, on amène le zéro du premier vernier de l'alidade en face du zéro du limbe et l'on serre la vis P_1 (en achevant d'amener les zéros en coïncidence au moyen de la vis de rappel R_1 correspondant à P_1). Desserrant alors la vis P, on dirige la ligne de visée sur le premier point A. A ce moment, on serre P, et l'on achève l'exactitude du pointé en agissant sur la vis de rappel R correspondante. Desserrant alors P_1, et le limbe cette fois restant fixe, on amène la ligne de visée sur le second point B ; nouveau serrage de P_1 et achèvement du pointé à l'aide de R_1.

Pour la seconde opération on recommence de même, en se servant cette fois, pour la première visée, du trait $\frac{\pi}{r}$ au lieu du trait o du limbe, et ainsi de suite.

14. *Erreurs accidentelles.* — Indépendamment des erreurs systématiques qui viennent d'être examinées, chaque lecture est entachée

d'une erreur accidentelle tenant à l'imperfection avec laquelle sont faits le pointé et la lecture. Cette erreur accidentelle dépend évidemment, dans une certaine mesure, de l'habileté de l'opérateur. Pourtant, avec des opérateurs suffisamment exercés, l'erreur moyenne quadratique à craindre (c'est-à-dire celle dont le carré est égal à la moyenne des carrés des erreurs faites sur un grand nombre de lectures) est à peu près constante avec un même instrument. Nous la représenterons par e_2. Dès lors, si un angle ω est donné en fonction des lectures u et u' par la formule

$$\omega = \frac{\Sigma u'}{p} - \frac{\Sigma u}{p},$$

l'erreur moyenne quadratique accidentelle à craindre sur la valeur de ω est ([1])

$$e_2\sqrt{\frac{2}{p}}.$$

En particulier, si l'on opère au moyen de deux verniers opposés sans réitération, l'erreur moyenne quadratique sur la valeur de ω est précisément la même que celle qui correspond aux lectures faites isolément sur le limbe.

Nous aurons soin, par la suite, de faire connaître, chaque fois que nous le pourrons, la valeur de e_2 correspondant aux divers types d'instruments étudiés. Il en résultera, comme on le verra plus loin, un moyen de contrôle de la valeur des opérations effectuées au moyen de ces instruments.

15. *Aiguille aimantée. Déclinatoire.* — Afin d'orienter les directions prises au moyen d'un cercle horizontal, il faut joindre à ce

---

([1]) Conséquence de cette formule : Si l'erreur moyenne quadratique sur les valeurs de $x, y, z, \ldots$ est donnée par e_2, l'erreur moyenne quadratique sur la valeur de $ax + by + cz + \ldots$ est donnée par

$$e_2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}.$$

Ici, parmi les coefficients $a, b, c, \ldots$, au nombre de $2p$, affectant les quantités u et u', il y en a p (affectant les u') égaux à $\frac{1}{p}$, p (affectant les u) égaux à $-\frac{1}{p}$; il vient donc, pour l'erreur moyenne résultante :

$$e_2\sqrt{\frac{p}{p^2} + \frac{p}{p^2}} = e_2\sqrt{\frac{2p}{p^2}} = e_2\sqrt{\frac{2}{p}}.$$

cercle une aiguille aimantée mobile sur une rose des vents, dont la ligne de foi soit repérée par rapport à la graduation du cercle. Elle sera, par exemple, parallèle à la ligne $0-200^G$. Dès lors, lorsque l'instrument sera placé de telle sorte que l'aiguille aimantée se dirige suivant la ligne de foi, les angles comptés à partir du 0 du cercle divisé se confondront avec les azimuts magnétiques [1] (comptés à partir du Nord vers l'Ouest, de 0 à 400^G).

Lorsque l'aiguille aimantée sert ainsi simplement à orienter l'instrument, il est inutile de lui laisser beaucoup d'amplitude autour de la ligne de foi. On peut alors l'enfermer dans un cadre rectangulaire. On a ainsi ce que l'on appelle un *déclinatoire*.

Le déclinatoire prend aussi la forme d'un tube fixé à la base de l'instrument dont l'axe, parallèle à la ligne $0 - 200^G$ du cercle divisé, est pris comme ligne de foi. L'aiguille aimantée porte en chacune de ses extrémités une pointe verticale très fine. L'instrument est orienté quand ces deux pointes se projettent l'une sur l'autre. Pour que l'œil en puisse mieux juger, M. Sanguet a eu recours à l'ingénieux dispositif que voici : un petit miroir placé au milieu du tube, perpendiculairement à son axe, renvoie l'image de la pointe antérieure à une distance de l'œil égale à celle où se trouve la pointe postérieure.

Pour juger de la coïncidence de cette image et de cette pointe, il n'est nul besoin, d'ailleurs, de placer l'œil dans l'axe du tube (position dans laquelle la vue est gênée par la chape de l'aiguille aimantée). On voit, en effet, que, si le plan des deux pointes est perpendiculaire à celui du miroir, l'image directe de l'une des pointes et l'image réfléchie de l'autre coïncident pour toute position de l'œil.

De son côté, le colonel Goulier a employé pour le même objet une lentille échancrée d'une distance focale égale au demi-rayon de l'aiguille (*voir* ses *Études sur les levers topométriques*, p. 402).

16. *Mires.* — Les mires sont des règles en bois, ordinairement graduées en centimètres.

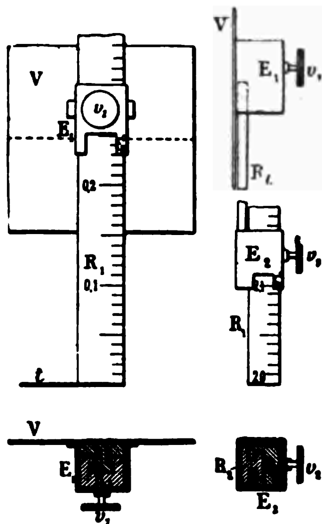
Les unes, dites *à voyant,* portent une plaque dont le centre appa-

---

[1] Les Tables données dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* permettent d'en déduire les azimuts vrais comptés à partir du méridien géographique pour un certain nombre de localités. Comme ce nombre est relativement restreint et que, d'autre part, la déclinaison varie avec le temps, il est préférable, quand on recherche une certaine précision, de déterminer directement, au moyen de la boussole dont on s'est servi pour le lever, la déclinaison locale.

raît comme le sommet commun à 4 quadrants distingués par des couleurs différentes ([1]) (*fig.* 12). Ce voyant est fixé à un curseur muni de

Fig. 12.



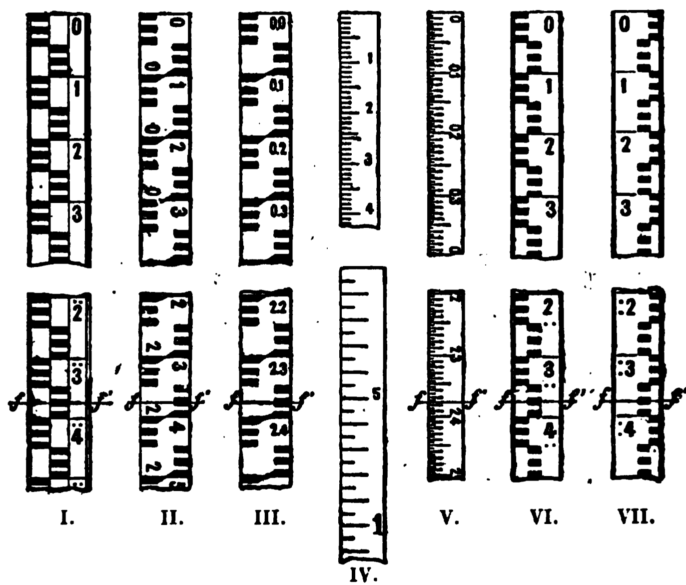
vernier qui glisse sur la graduation lue par la personne qui tient la mire.

Les autres, pourvues de graduations rendues bien apparentes par l'emploi de couleurs diverses, se lisent à distance, au moyen du viseur de l'instrument qui sert à les observer. Ce sont les mires *parlantes* (*fig.* 13). Les lectures faites sur ces mires s'effectuent généralement par couples de deux dont on prend la moyenne; on a recours, en ce cas, à des graduations doublées, sur lesquelles les centimètres, décimètres, etc. sont remplacés par des doubles-centimètres, doubles-décimètres, etc.; chaque lecture est alors moitié de ce qu'elle devrait être réellement, et, au lieu d'avoir à faire la moyenne des deux lectures correspondant à une visée, on n'a qu'à en faire la somme. Il faut avoir bien soin si, avec une mire de ce type, l'on se contente d'une seule lecture pour chaque visée, de doubler le chiffre lu. La lecture unique équivaut, en effet, alors à deux lectures égales.

([1]) En vertu du principe que la bissection donne une plus grande précision que la coïncidence, le colonel Goulier a préconisé des voyants de couleur (rouge, de préférence) à bande centrale blanche que l'on bissecte au moyen de la ligne de visée

Pour les opérations de haute précision, le colonel Goulier a établi des mires compensées, c'est-à-dire munies d'un thermomètre bi-

Fig. 13.



I. Type du commerce.
II. » Goulier.
III. » Durand-Claye.
IV. » Porro.
V. » N. G. F.
VI. » Sanguet.
VII. » Prévot.

métallique de Borda faisant connaître, à chaque instant, la correction à apporter à leur lecture.

Afin d'assurer plus exactement la verticalité d'une mire, on peut la munir soit d'une petite nivelle sphérique fixée à une console perpendiculaire à la règle tenue verticalement, soit d'un petit pendule, dit perpendicule, logé dans une rainure de cette règle.

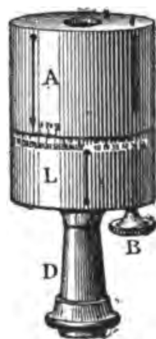
CHAPITRE II.

PLANIMÉTRIE.

I. — Mesure des angles.

17. *Pantomètre.* — Nous nous occuperons d'abord de la mesure des angles horizontaux. L'instrument le plus simple propre à cette détermination est le pantomètre ([1]) (*fig.* 14). Il est formé d'un

Fig. 14.



cylindre de laiton sectionné perpendiculairement à son axe, et dont la partie supérieure A, servant d'alidade, peut tourner par rapport à la partie inférieure L servant de limbe, grâce à un bouton B agissant sur une crémaillère intérieure.

L'instrument peut, au moyen d'une douille D, être placé sur un pied que l'on fiche en terre et que l'on dispose verticalement, soit au jugé, soit au moyen d'un fil à plomb.

Chaque cylindre est muni d'un plan de visée déterminé par l'axe d'une fenêtre étroite et un fil tendu suivant l'axe d'une seconde fenêtre, plus

([1]) Désigné aussi, dans le service du Génie, sous le nom de *goniasmomètre,* étymologiquement plus exact, mais d'un usage moins répandu.

large, diamétralement opposée à la première. En outre, le cylindre limbe portant la graduation, le cylindre alidade est muni de deux verniers opposés. Afin que la lecture correspondant à la première visée soit zéro, ainsi qu'on l'a dit plus haut, le limbe est muni d'un plan de visée correspondant au zéro de sa graduation. Il suffit alors de faire passer le plan de visée du limbe par le premier point, puis celui de l'alidade par le second, pour que la lecture faite au zéro du premier vernier, augmentée de la moyenne des appoints lus sur les deux verniers, fasse connaître l'angle cherché.

Sur un pantomètre de $0^m,10$ de diamètre, la graduation du limbe est en degrés, et chaque vernier de l'alidade est au $\frac{1}{30}$, ce qui donne une approximation de $\frac{1^\circ}{30} = 2'$.

Un tel pantomètre comporte une erreur moyenne quadratique de $0^G,06$ à $0^G,07$ ($3'30''$ environ) pour chaque lecture [1]. Ce sera aussi, comme nous l'avons vu au n° **14**, l'erreur e_2 que comportera la mesure des angles si on lit chaque fois les deux verniers; si on n'en lit qu'un, l'erreur e_2 des angles sera $3'30'' \times \sqrt{2} = 5'$ environ.

D'après le colonel Goulier cette erreur est réduite environ de moitié lorsqu'on vise par bissection à travers deux fentes au lieu de viser par une fente et un crin.

18. *Graphomètre.* — Le graphomètre, dont l'usage tend à disparaître, se place généralement sur un trépied. Il est parfois muni d'une boussole permettant d'orienter le plan du limbe. Cette boussole peut encore servir à assurer approximativement l'horizontalité du limbe. En effet, l'aiguille de la boussole étant construite de façon que, sous l'action de l'inclinaison magnétique, son état d'équilibre soit horizontal (grâce à l'allégement de sa pointe Nord), il suffit de faire en sorte que, dans ses oscillations, elle reste parallèle au plan du limbe [2]. Le limbe est d'ailleurs réduit, en vue du moindre encombrement, à un demi-cercle AMB (*fig.* 15) et porte aux extrémités du diamètre de ce demi-cercle deux pinnules permettant, comme pour le pantomètre,

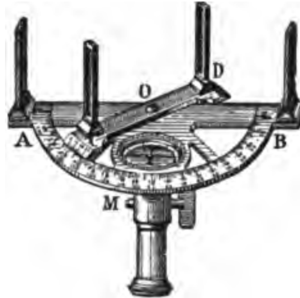
---

(1) Ces chiffres, ainsi que tous ceux qui seront donnés dans la suite, nous ont été communiqués par M. Prévot. Ils proviennent soit de ses expériences personnelles, soit de celles de M. Sanguet.

(2) Il faut noter toutefois que les variations de l'inclinaison peuvent faire qu'une aiguille équilibrée en une certaine région ne le soit plus du tout dans une autre. Les aiguilles des instruments plus précis portent une masselotte qui peut glisser le long d'une des moitiés de l'aiguille de façon à permettre le réglage en chaque région.

d'annuler la lecture initiale par une visée faite sur le premier point. Deux graduations de sens contraires sont tracées sur la demi-circonférence du limbe. L'alidade est constituée par une lame diamétrale CD

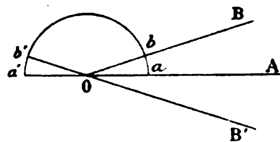
Fig. 15.



portant à ses extrémités deux verniers disposés en sens contraire et qui s'appliquent chacun à l'une des deux chiffraisons du limbe (1). L'instrument a, en effet, été combiné en vue du mode d'emploi suivant.

Si, lorsque l'on a visé le premier point A au moyen des pinnules du limbe (*fig.* 16), le deuxième point B se trouve du côté du limbe, on lit

Fig. 16.



l'angle AOB compté dans le sens direct au moyen du vernier direct en *ab*; si le deuxième point se trouve du côté opposé en B′, on lit l'angle AOB′ compté dans le sens rétrograde au moyen du vernier inverse en *a′b′*. Ce procédé prête à la critique; il complique les lectures, en introduisant des angles comptés, les uns dans le sens direct, les autres dans le sens rétrograde, ce qui peut amener des confusions, et, d'ailleurs, est tout à fait inutile. On peut, en effet, dans tous les cas, se servir de la seule graduation directe de 0 à 180°; pour un point tel que B′, après avoir fait la lecture au moyen de cette gradua-

(1) Comme on ne peut, pour chaque visée, se servir que de l'un des deux verniers, il n'y a pas ici élimination des erreurs systématiques (n° 12), ce qui est un sensible inconvénient.

tion, il suffit d'y ajouter 180°. On évitera toute espèce d'erreur avec ce procédé en employant le moyen mnémotechnique suivant : ajouter ou non à la lecture faite sur la graduation directe un appoint de 180° suivant que, lorsqu'on vise un point, on est ou non par rapport à la ligne OA du côté où se trouve le demi-cercle constituant le limbe, demi-cercle qui matérialise en quelque sorte les 180° de l'appoint.

Sur un graphomètre de $0^m,20$ de diamètre, les plus petites divisions du limbe sont des demi-degrés ou 30′; le vernier au $\frac{1}{30}$ donne donc la minute.

Avec un tel graphomètre, l'erreur moyenne quadratique e_2 sur la lecture est de $0^G,04$ (2′ environ), ce qui correspond à une erreur moyenne de $2' \times \sqrt{2} = 3'$ environ sur la mesure des angles, puisqu'on ne peut lire ici qu'un vernier pour chaque visée.

19. *Goniomètres à lunette.* — Les goniomètres à lunette ([1]),

Fig. 17.



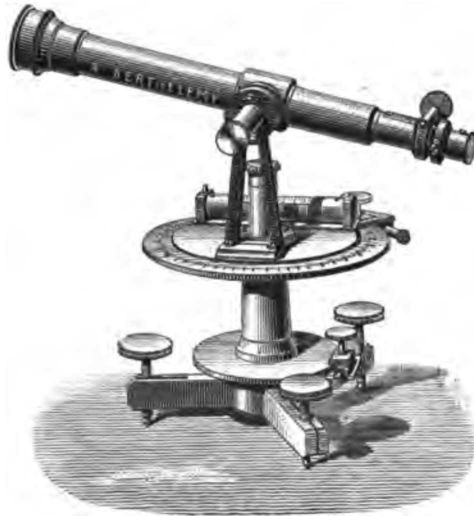
dont l'emploi s'impose dès que l'on aborde les levers de quelque

([1]) Rappelons que l'introduction des lunettes dans les instruments de ce genre est due à un Français, l'abbé Picard, l'un des fondateurs de la Géodésie au XVIIe siècle.

ampleur, sont dits par les constructeurs *cercles d'alignement* ou *cercles géodésiques* [1], suivant que la lunette repose sur deux montants verticaux par l'intermédiaire de deux tourillons (*fig.* 17), ou qu'elle est montée en porte-à-faux à l'extrémité d'un montant unique, au delà duquel elle est équilibrée par un contrepoids (*fig.* 18).

Au reste, on retrouve dans ces instruments les parties essentielles

Fig. 18.



définies au n° 10 : un limbe en forme de couronne circulaire portant la graduation, un cercle alidade portant deux verniers opposés et un viseur qui est l'axe optique de la lunette se mouvant dans un plan passant par l'axe principal de l'instrument, le tout reposant sur le support par l'intermédiaire de trois vis calantes.

Au cercle alidade est d'ailleurs fixé le niveau à bulle permettant de rendre vertical cet axe principal, ainsi qu'il a été dit au n° 7.

Une vis de pression (complétée par une vis de rappel) permet de fixer ou non le limbe à l'embase de l'instrument, une autre vis de pression (complétée aussi par une vis de rappel) de le fixer ou non à l'alidade.

L'ensemble de ces deux vis de pression permet de faire corres-

---

[1] Cette appellation, conforme à un usage commercial, ne répond nullement à la destination de ces instruments. Les cercles effectivement employés en Géodésie ont une tout autre disposition.

pondre à la première visée la lecture zéro sur le limbe et aussi, le cas échéant, d'opérer par réitération, suivant le mode indiqué au n° 13.

L'axe optique de la lunette doit être réglé. Il faut, en premier lieu, qu'il soit rendu perpendiculaire à la ligne des tourillons, sinon, dans sa rotation, il décrirait un cône. Pour effectuer cette rectification on vise une mire éloignée placée horizontalement. On soulève la lunette et l'on interchange les tourillons (ou, si l'on a affaire à un cercle géodésique, on dévisse la lunette et on la revisse après l'avoir fait tourner d'une demi-circonférence autour de son axe géométrique). Si le centre du réticule tombe sur un autre point de la mire, l'écartement entre celui-ci et le précédent correspond au double de la déviation à corriger. On agit alors sur la vis de réglage du réticule de façon à ramener son centre sur le point médian entre les deux points successivement visés.

L'axe optique de la lunette étant ainsi perpendiculaire à l'axe des tourillons, il faut encore que celui-ci soit perpendiculaire à l'axe principal de l'instrument, de façon à être horizontal quand l'axe principal est placé verticalement, sinon le plan de visée serait incliné. On vérifie cette condition, après avoir placé verticalement l'axe principal, en suivant avec la lunette un fil à plomb situé à quelque distance, et l'on effectue le réglage correspondant en modifiant, à l'aide d'une vis *ad hoc*, l'angle que la ligne des supports des tourillons fait avec l'axe principal de l'instrument.

La graduation des cercles du type le plus courant est faite en tiers de degré ou $20'$; les verniers sont au $\frac{1}{40}$ et donnent, par suite, la demi-minute, ou les $30''$.

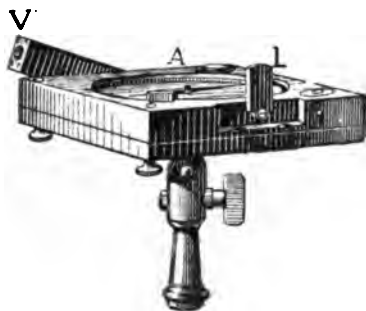
Pour les cercles à lunette de $0^m,16$ de diamètre, l'erreur moyenne e_2 sur la lecture est de $0^G,018$, soit de $1'$ environ. Rappelons encore que cette erreur est la même sur la mesure de l'angle quand on se sert des deux verniers.

20. *Boussole.* — La boussole (*fig.* 19) diffère des instruments précédents au point de vue de la disposition générale en ce qu'elle se rattache à la seconde variété du type schématique décrit au n° 10, celui où c'est l'alidade qui porte la graduation et le limbe qui porte l'index. On doit, en effet, considérer ici que le limbe est réduit à l'aiguille aimantée, l'index pour la lecture étant constitué par la pointe Nord de cette aiguille. La différence des lectures faites en face de cette pointe donne l'angle des deux visées; chaque lecture indique d'ail-

leurs l'azimut magnétique de la direction dans laquelle on vise.

Le viseur est généralement fixé sur un des côtés de la boîte et l'instrument est placé sur un pied par l'intermédiaire d'une douille

Fig. 19.



munie d'un genou à coquille qui permet de le disposer horizontalement. Si l'on veut avoir les azimuts des alignements relevés par rapport à la méridienne, il suffit de tenir compte de la déclinaison magnétique du lieu où l'on se trouve. La graduation étant portée par l'alidade (c'est-à-dire la partie mobile avec la ligne de visée) doit, selon la remarque énoncée au n° 10, être faite en sens rétrograde. Ses plus petites divisions sont le demi-degré ou le quart de degré. Par l'estime, on obtient aisément la moitié de cet intervalle, soit environ les $7'$.

Il y a lieu, pour les petites portées, de tenir compte de l'erreur d'excentricité provenant de ce que le viseur VV′ ne passe pas par le centre C de l'instrument (*fig.* 20). Lorsque le viseur VV′ passe par le point A, on lit pour l'azimut magnétique de ce point l'angle OCN, alors que sa vraie valeur serait l'angle ACN égal à OCN — α. Or, l'angle α sous lequel, du point A, on voit le demi-côté BC de la boîte, ne dépend que de la distance AB. On peut donc dresser une table des corrections α correspondant aux diverses valeurs de AB. Par exemple, si $BC = 0^m,10$, pour

$$AC = 10^m, \quad 20^m, \quad 30^m, \quad 40^m, \quad 50^m,$$

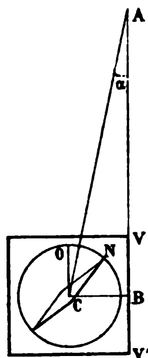
on a

$$\alpha = 34',2, \quad 17', \quad 11',5, \quad 8',5, \quad 7'.$$

Les angles n'étant lus qu'avec une approximation de $7'$, il n'y a pas lieu de tenir compte de cette correction au delà d'une distance de 50^m.

Afin d'éviter cette correction, certaines boussoles sont munies d'une lunette fixée en porte-à-faux à une colonne (comme sur les

Fig. 20.



cercles géodésiques) et placée de telle façon que le vertical décrit par l'axe optique passe par le centre de la boussole.

21. *Équerres*. — Les divers instruments de mesure d'angles peuvent inversement servir à reporter sur le terrain un angle donné. Mais lorsqu'il s'agit d'un angle droit, ce qui est de beaucoup le cas le plus fréquent, on a recours à des instruments spéciaux qui sont les *équerres*.

La plus simple de toutes est l'*équerre d'arpenteur* (*fig.* 21),

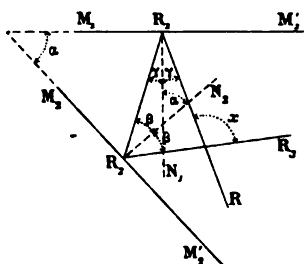
Fig. 21.



constituée par une boîte, généralement cylindrique ou octogonale, où des plans de visée rectangulaires sont déterminés par des fenêtres minces verticales. On se sert aussi volontiers aujourd'hui de l'*équerre Coutureau*. Cet instrument est fondé sur le principe de la double

réflexion : Lorsqu'un rayon lumineux $RR_1R_2R_3$ tombe successivement sur deux miroirs $M_1M'_1$ et $M_2M'_2$ (*fig.* 22), l'angle des rayons incident et réfléchi est égal au double de l'angle des miroirs. Il est facile de le constater en considérant les normales R_1N_1 et R_2N_2 aux

Fig. 22.

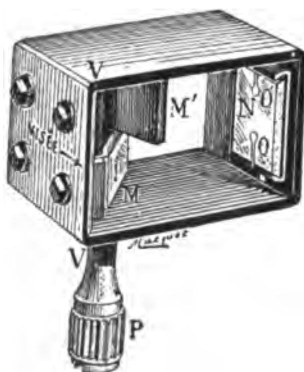


deux miroirs, dont l'angle est égal à l'angle α de ces miroirs et qui déterminent pour chacun d'eux un angle d'incidence égal à l'angle de réflexion. On voit dès lors que $\alpha = \beta + \gamma$, et $x = 2\beta + 2\gamma$, d'où $x = 2\alpha$.

Si donc $\alpha = \frac{1}{2}$ droit, $x = 1$ droit.

Cela dit, l'équerre Coutureau se compose d'une petite boîte métallique (*fig.* 23) contre une paroi de laquelle est fixé un premier mi-

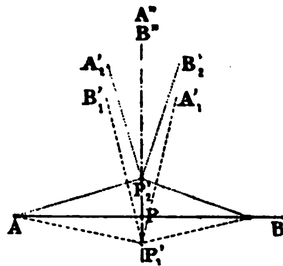
Fig. 23.



roir N percé de deux petites ouvertures O et O′. En face de celui-ci sont disposés deux autres miroirs M et M′ plus petits, inclinés à 45° sur le premier, et, par suite, rectangulaires entre eux.

Ces petits miroirs renvoient donc dans des directions rectangulaires les images réfléchies des points situés de chaque côté de l'instrument, l'un pour ceux qui sont à droite, l'autre pour ceux qui sont à gauche. Ces images sont reçues par l'œil, placé près de l'arête verticale VV, à la hauteur de la flèche à côté de laquelle on lit le mot *visée,* et qui aperçoit le terrain situé en avant, à travers les ouvertures O et O'. Suivant que l'instrument est placé en P'_1 en arrière de l'alignement AB (*fig.* 24), en P'_2, en avant, ou en P sur cet alignement, les images

Fig. 24.



réfléchies des points A et B sont écartées, avec ou sans inversion, ou confondues. En vertu de cette remarque on peut, au moyen de l'équerre en question, obtenir un point P sur AB, en faisant coïncider les images réfléchies de A et B et avoir en même temps sur le terrain la direction PA'', perpendiculaire à AB, ou encore obtenir le pied P de la perpendiculaire abaissée d'un point extérieur sur AB, en cherchant la position de l'équerre pour laquelle l'image directe de ce point extérieur vu par les ouvertures O et O' coïncide à la fois avec les images réfléchies de A et B.

L'erreur moyenne des directions données par cet instrument n'est pas inférieure à $0^G,05$.

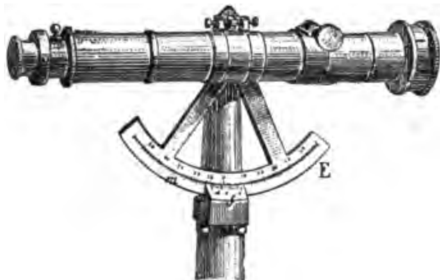
22. *Éclimètres.* — La mesure des angles verticaux intéresse, comme nous allons le voir, la planimétrie, en raison de la réduction des distances à l'horizon. Après avoir examiné les dispositions générales applicables à la mesure des angles horizontaux, nous allons donc aborder immédiatement celles qui se rapportent à la mesure des angles verticaux.

Les instruments servant à la mesure des angles verticaux se rangent

dans deux grandes catégories suivant qu'ils donnent ces angles eux-mêmes (*éclimètres*) ou leurs tangentes (*clisimètres*).

Pour les premiers (*fig.* 25) le principe est le même que pour les goniomètres que nous venons de passer en revue, à cette différence près qu'ici la ligne de visée reste parallèle au plan du cercle gradué

Fig. 25.

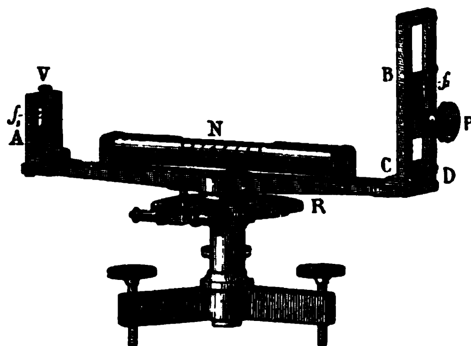


et que l'origine des angles est prise invariablement dans une des deux directions *zénith* ou *horizon*. Cette convention donne lieu à une petite rectification lorsque le o de la chiffraison dans le premier cas, la division 90° ou 100^{G} dans le second, ne correspond pas exactement au zénith. Il suffit, pour effectuer cette rectification, d'appliquer la méthode du retournement : après avoir rendu l'axe de l'instrument aussi exactement vertical que possible, on vise un point très éloigné une première fois, puis une seconde, après avoir fait tourner la lunette d'une demi-circonférence autour de l'axe vertical de l'instrument.

La bissectrice de l'angle des directions définies par ces deux visées sur le cercle gradué vertical est celle qui correspond au zénith. Si elle ne se confond pas avec la direction o dans un cas (90 ou 100 dans l'autre), sa différence avec celle-ci fait connaître le double de la correction dont devrait être affectée chaque distance zénithale. Le limbe vertical, qu'il porte la graduation ou l'index (comme c'est le cas sur la *fig.* 25), est muni d'un dispositif permettant de lui imprimer un léger déplacement angulaire sur lui-même. Ayant alors visé de nouveau le point qui a servi pour la rectification, on fait tourner le limbe vertical au moyen de ce dispositif jusqu'à ce que la lecture correspondante soit corrigée de la quantité qui vient d'être déterminée.

23. *Clisimètres.* — Si l'on cherche seulement la tangente de l'angle qu'une direction fait avec l'horizon, on emploie les *clisimètres* ou *niveaux de pente*. Le plus classique de ces appareils est le *niveau de Chézy* (*fig.* 26), qui se compose d'un axe vertical porté par trois vis calantes et muni d'un niveau à bulle N, et d'une règle AC horizontale portant à chacune de ses extrémités une pinnule munie d'un œilleton et d'une croisée de fils, chaque œilleton correspondant au centre

Fig 26.



de la croisée de la pinnule opposée. Les deux lignes de visée ainsi déterminées sont très rapprochées et parallèles. L'une des pinnules A est fixe, l'autre B, actionnée par une crémaillère, est mobile dans un cadre vertical portant une graduation qui fait connaître la tangente de l'inclinaison de la ligne de visée sur l'horizon. Cette lecture se fait d'ailleurs au moyen d'un vernier porté par la pinnule mobile. Pour une rampe, on vise par l'œilleton fixe, pour une pente par l'œilleton mobile.

Pour que l'instrument soit réglé, il faut que, pour la lecture o, la ligne de visée soit horizontale. A cet effet, après avoir rendu vertical l'axe principal au moyen du niveau N, on met le vernier au zéro et l'on vise une mire tenue verticalement à une certaine distance. On fait ensuite tourner l'instrument d'une demi-circonférence autour de son axe. Si le point lu sur la mire n'est pas le même que dans le premier cas, on agit sur la pinnule fixe, au moyen de sa vis de réglage, jusqu'à ce que la ligne de visée passe par le point médian des deux précédents.

L'échelle le long de laquelle se déplace la pinnule mobile est géné-

ralement graduée en 0,01, et cette pinnule est munie d'un vernier au $\frac{1}{10}$ donnant par conséquent une approximation de 0,001.

Le constructeur Berthélemy a, sur les indications de M. Durand-Claye, inspecteur général des Ponts et Chaussées, modifié cet instrument (*fig.* 27), en constituant le viseur au moyen d'une lunette et en reportant la graduation des tangentes sur un limbe circulaire, ce qui permet de mesurer des angles d'une amplitude plus grande et avec une précision supérieure à celle que l'on obtient au moyen de l'instrument précédent.

Cette graduation en 0,01 permet encore d'obtenir le 0,001 au

Fig. 27.



moyen d'un vernier. Afin d'éviter les lectures négatives, le 0 a été mis en correspondance avec la ligne plongeante à 45°, de sorte que, pour avoir la pente à partir de l'horizon, il faut, de la lecture faite, retrancher l'unité.

On trouvera incidemment plus loin d'autres types de clisimètres (n°s 32 et 35).

24. *Théodolite.* — Le théodolite (*fig.* 28) est l'instrument constitué par la réunion sur le même bâti d'un goniomètre horizontal et d'un éclimètre. Il suffit de rapprocher ce qui a été dit précédemment du réglage d'un axe vertical au moyen du niveau (n° 7), du réglage de la lunette des cercles d'alignement (n° 19), de l'usage des cercles horizontaux (n° 19) et verticaux (n° 22), de l'orientation au moyen du déclinatoire (n° 15), pour avoir une théorie générale de cet instrument.

Il est inutile, pour les besoins courants de la Topométrie, d'entrer dans plus de détails. Nous croyons toutefois devoir signaler le type

Fig. 28.



nouveau de théodolite imaginé par M. l'ingénieur en chef des Mines Lallemand, en vue des besoins du Cadastre (*fig.* 29). Dans ce théodolite, les cercles, divisés en décigrades, sont lus au moyen de microscopes à réticules d'un grossissement suffisant pour permettre l'estime au $\frac{1}{10}$ et donner par suite le centigrade. Ces microscopes, au nombre de trois, deux pour faire les lectures opposées sur le gonio-

mètre horizontal, et un pour l'éclimètre, sont coudés pour permettre à l'opérateur de s'en servir pour la lecture dans la position même qu'il

Fig. 29.



occupe pour la visée. L'éclimètre est d'ailleurs réduit à un secteur permettant d'atteindre 30^{G} au-dessus et au-dessous de l'horizon.

II. — Mesure des distances.

25. *Mesures au moyen d'étalons de longueur.* — Le procédé qui se présente tout d'abord à l'esprit consiste à porter successivement un certain nombre de fois une certaine unité de longueur entre les deux points dont on cherche la distance. Il faut en ce cas jalonner préalablement la ligne que l'on a à mesurer. On emploie à cet effet des jalons en bois ou en fer que l'on fait placer par un aide, soit en les alignant à l'œil sur les deux jalons extrêmes, soit en se servant du cercle d'alignemen lorsqu'on a affaire à de grandes distances. C'est

sur la ligne droite ainsi déterminée qu'on reporte l'unité de longueur choisie (qui est généralement le décamètre), matérialisée sous forme de *chaîne de fer*, de *ruban d'acier* ou de *règle de bois* et que l'on a soin de tenir horizontalement.

Pour les mesures très précises, on se sert de règles en sapin portant à leurs extrémités des languettes graduées permettant d'évaluer de très petites fractions de la longueur de la règle.

L'emploi d'une règle de sapin de 5^m donne sur la mesure d'une distance de 50^m à 150^m une erreur moyenne relative de $\frac{1}{2000}$.

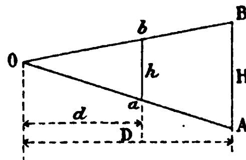
Lorsqu'on emploie la chaîne d'arpenteur ou le ruban d'acier, l'opérateur et son aide tiennent chacun une extrémité de l'instrument. Pour chaque portée, l'aide, qui marche en avant et que l'opérateur aligne sur le jalon suivant, tend la chaîne et plante une fiche que l'opérateur ramasse à la portée suivante; le nombre de fiches ramassées donne le nombre de décamètres mesurés. Lorsqu'on opère en terrain incliné, la mesure se fait par *cultellation*, c'est-à-dire par portées horizontales; l'aide tend alors la chaîne horizontalement et laisse tomber de son extrémité une fiche plombée dont il marque le point de chute au moyen d'une fiche ordinaire.

Sur une distance de 50^m à 150^m la chaîne d'arpenteur donne une erreur moyenne relative de $\frac{1}{800}$ à $\frac{1}{1000}$; le ruban d'acier, plus facile à tendre, construit plus soigneusement, donne, dans ces conditions, une erreur de $\frac{1}{1500}$.

Les fils Jäderin, sous tension constante, construits en acier au nickel pour rendre négligeable l'influence de la température, et qui ont déjà rendu de si bons services en Géodésie, sont évidemment appelés, moyennant quelques simplifications, à entrer dans les usages de la Topométrie, pour les opérations de quelque précision.

26. *Procédés optiques.* — On a plus volontiers recours aujourd'hui,

Fig. 30.



au moins pour les levers d'itinéraire, à la mesure des distances par les procédés optiques au moyen des instruments dits *stadimétriques*.

Tous ces appareils reposent sur le principe suivant :

Supposons que d'un point O (*fig.* 30), on vise successivement dans deux directions faisant entre elles un très petit angle et qui interceptent sur deux lignes parallèles des segments AB et *ab*. Soient H et *h* les longueurs de ces segments, D et *d* les distances du point O aux lignes parallèles AB et *ab* ; la considération des triangles semblables O*ab*, OAB conduit à la relation

$$D = \frac{dH}{h}.$$

C'est sur cette égalité qu'est fondé le principe de tous les instruments stadimétriques.

On peut en tirer parti de plusieurs manières :

1° *Connaissant* H *et h on peut rendre d variable,* c'est-à-dire qu'en visant une longueur H située à la distance cherchée D, on déplace un curseur portant deux repères espacés de *h*, sur une règle graduée jusqu'à ce que les rayons visuels OA et OB passent par ces repères ; on lit alors la distance *d* sur la règle graduée et l'on en déduit la distance D. Cette méthode est appliquée pour les besoins de l'art militaire dans quelques *télémètres*.

2° *Connaissant* H *et d on peut mesurer h*, c'est-à-dire qu'en visant une longueur H connue, à la distance cherchée D, on évalue la longueur interceptée par les rayons visuels extrêmes OA et OB sur un axe *ab* placé à une distance *d* de l'œil. Il existe aussi des télémètres fondés sur ce principe.

Si l'on veut obtenir une certaine précision, on opère au moyen d'un réticule à fils parallèles, l'un fixe, placé sur une des lignes de visée, l'autre mobile amené sur la seconde. Une vis micrométrique actionnant ce fil mobile permet de déterminer la grandeur de son déplacement à partir du fil fixe.

Les instruments fondés sur ce principe sont délicats et peu répandus, au moins en France. Nous aurons néanmoins à en citer un exemple remarquable (n° 32).

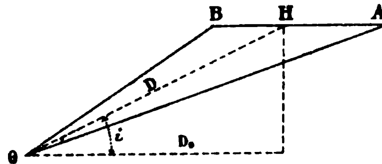
3° *Connaissant h et d on peut enfin se proposer de déterminer* H. Dans ce cas, c'est la ligne AB qui sera graduée. On appelle la règle qui porte cette graduation une *stadia*. Le procédé de la stadia est couramment employé en Topométrie ; aussi allons-nous le décrire avec quelque détail.

27. *Stadia.* — D'une façon générale, le procédé consiste à matérialiser les longueurs d et h ; on forme ainsi une espèce de viseur réduit sur la figure 30 à une représentation schématique. On vise suivant Oa et Ob une stadia placée à la distance cherchée. La différence des lectures faites sur cette stadia donne H d'où on déduit D. Il y a lieu toutefois de remarquer que, pour les besoins de la planimétrie, cette distance doit être réduite à l'horizon.

Or, cette réduction s'effectue de diverses façons suivant la disposition donnée à la stadia.

En premier lieu, on peut la disposer horizontalement (*fig.* 31);

Fig. 31.

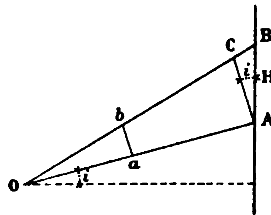


la distance D, fournie par la formule précédente, étant celle du point O à la stadia, il faut, pour avoir la distance horizontale D_0, connaître l'inclinaison i du rayon visuel sur l'horizon; la distance D_0 est alors donnée par

$$D_0 = D \cos i. \tag{1}$$

On préfère généralement, au moins en France, placer la stadia verticalement [1] (*fig.* 32). Du point O on vise alors deux points A

Fig. 32.



et B de la stadia, non situés sur une parallèle à ab; ce qu'on lit c'est la longueur H de AB, mais ce qu'il faudrait connaître pour avoir D,

---

[1] Cette disposition a l'avantage de permettre d'effectuer à la fois la détermination de la distance et le nivellement trigonométrique (n° 51).

c'est le segment AC intercepté par OA et OB sur une parallèle à *ab*, c'est-à-dire sensiblement, vu l'extrême petitesse de l'angle en O, sur une perpendiculaire à OA. Dans ces conditions, l'angle BAC est égal à l'inclinaison *i* de la ligne de visée OA sur l'horizon et comme, d'autre part, toujours en raison de la petitesse de l'angle en O, l'angle ACB est très voisin d'un droit, on peut écrire, sans faire d'erreur sensible,

$$AC = H \cos i.$$

Donc la longueur OA est donnée par

$$OA = \frac{dH}{h} \cos i,$$

et la distance horizontale cherchée D_0, par

$$D_0 = \frac{dH}{h} \cos^2 i.$$

Si l'on convient d'appeler encore D la quantité $\frac{dH}{h}$ qui représenterait la distance OA dans le cas d'une visée horizontale, la distance D_0 sera donnée par la formule

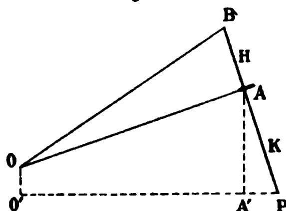
$$(2) \qquad D_0 = D \cos^2 i.$$

En général, on préfère calculer la correction $\varepsilon = D - D\cos^2 i$, à apporter à la valeur D, correction qui est donnée par la formule

$$\varepsilon = D \sin^2 i.$$

Parfois enfin (et c'est plutôt la méthode allemande), au lieu de tenir la stadia verticalement, on l'incline de façon à la rendre perpendiculaire à OA (*fig.* 33). Il suffit pour cela que cette stadia soit munie, à une distance quelconque K de son pied, d'un collimateur qui lui soit perpendiculaire. En visant le point O à travers ce colli-

Fig. 33.



mateur, l'aide placera la stadia dans la position voulue; l'opérateur n'aura, dès lors, qu'à faire passer l'une des lignes de visée OA par par l'axe du collimateur.

La longueur OA est, dans ce cas, égale à $\frac{dH}{h}$, et la distance horizontale D_0 du point O au pied de la stadia se compose de la longueur $O'A' = OA\cos i$, augmentée de la distance $A'P = K\sin i$. La distance D_0 sera donc donnée par la formule

$$D_0 = D\cos i + K\sin i, \tag{3}$$

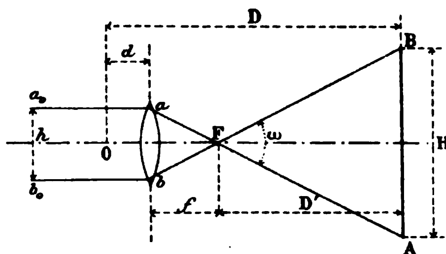
i étant l'inclinaison de OA sur l'horizon.

Dans tous les cas, on a, comme on voit, besoin de connaître l'inclinaison i de la ligne OA sur l'horizon, ce qui exige que l'instrument de visée soit muni d'un éclimètre (n° 22).

28. *Lunette stadimétrique.* — Le procédé de la stadia doit, pour être substitué avantageusement aux procédés de mesure directe, comporter des pointés précis; d'où la nécessité de faire les visées au moyen de lunettes pour amener à la même distance de l'œil l'image des traits de la stadia et celle des fils du réticule. Il s'agit de voir comment l'introduction d'un objectif sur le trajet des rayons visuels va modifier la formule servant à calculer D.

La longueur h sera ici l'écartement de deux fils horizontaux tendus dans le plan du réticule de la lunette (*fig.* 34). Moyennant cette

Fig. 34.



légère addition, toute lunette astronomique devient une lunette stadimétrique.

Soient donc a_0 et b_0 les traces de ces deux fils réticulaires sur le plan de la figure, ab l'objectif dont F est le foyer antérieur. En suivant la marche des rayons lumineux parallèles à l'axe en arrière de l'objectif,

on voit que l'on a

$$D' = \frac{f}{h} H,$$

D' étant la distance de la stadia non pas au centre O de l'instrument, mais *au foyer antérieur* F *de l'objectif*.

Il suffit que, par construction, le rapport $\lambda = \frac{f}{h}$ ait une valeur simple, comme 100 par exemple, pour que, de la lecture H effectuée sur la stadia, on conclue immédiatement et sans calcul la distance D'.

L'angle $aFb = \omega$ est dit *l'angle stadimétrique*. Comme il est très petit, on a sensiblement

$$\text{tang}\,\omega = 2\,\text{tang}\,\text{OF}a = 2\frac{h}{2f} = \frac{1}{\lambda},$$

et, par suite,

$$D' = \frac{H}{\text{tang}\,\omega}.$$

Mais le point du terrain où l'on est en station correspondant au point O situé sur l'axe vertical de l'instrument, c'est à partir de celui-ci que l'on doit compter les distances.

Si nous appelons C la somme de la distance d de l'objectif au point O et de la distance focale f de cet objectif, nous avons pour la distance D du point O à la stadia AB supposée normale à l'axe OF de la lunette

$$D = C + \lambda H.$$

La constante C est d'ailleurs appelée *correction de Reichenbach*.

Si la stadia est verticale et si l'axe OF est incliné de i sur l'horizon, on aura, d'après ce qui a été vu au numéro précédent,

$$D = C + \lambda H \cos i.$$

Donc, la distance D_0 réduite à l'horizon sera donnée, si la stadia est horizontale ou inclinée normalement à la ligne de visée, par

$$(1) \qquad D_0 = (C + \lambda H)\cos i$$

et, si la stadia est verticale, par

$$(2) \qquad D_0 = C\cos i + \lambda H \cos^2 i.$$

En pratique, on se contente en général d'incorporer la correction C dans la distance lue sur la stadia et de réduire à l'horizon par la

formule

$$D_0 = (C + \lambda H)\cos^2 i. \tag{2 bis}$$

On trouve ainsi une distance *trop courte* de la quantité

$$\Delta D_0 = C\cos i(1 - \cos i). \tag{3}$$

L'angle i de la visée est généralement assez petit, et, par suite, $\cos i$ assez voisin de 1 pour que cette correction soit négligeable. Si nous supposons C voisin de 50^{cm} (ce qui est conforme à la réalité) et si nous considérons comme négligeables les écarts inférieurs à 5^{cm}, nous voyons qu'il n'y aura lieu de tenir compte de la correction (3) qu'à partir de la valeur de i pour laquelle on aura

$$\cos i(1 - \cos i) = 0,1.$$

Or, pour $i = 30^G$, on a

$$\cos i(1 - \cos i) = 0,097.$$

Ce n'est donc que pour des valeurs supérieures à 30^G qu'il conviendrait de tenir compte de ΔD_0. Il serait d'ailleurs bien facile de dresser, d'après (3), la Table des valeurs de ΔD_0 en fonction de i, pour un instrument dont on connaît la constante C.

29. *Stadia du colonel Goulier.* — Le colonel Goulier s'est proposé de faire en sorte que la lecture faite sur la stadia donne directement la distance D comptée à partir du point O, et qui s'exprime, comme on vient de voir, par

$$D = C + \lambda H,$$

formule qui peut s'écrire

$$D = \lambda\left(H + \frac{C}{\lambda}\right).$$

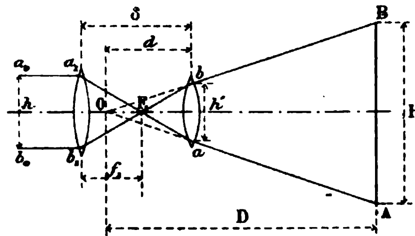
H est donné par la différence des lectures aux points A et B, c'est-à-dire des lectures que l'on fait sur les fils du réticule aux points a et b du plan focal de l'instrument. Pour obtenir D il faut, avant de multiplier par le rapport simple λ, apporter à la hauteur H la correction additive $\varepsilon = \frac{C}{\lambda}$.

Or, cette correction est fort petite. Si, par exemple, comme nous l'avons supposé ci-dessus, $\lambda = 100$, et si $C = 50^{cm}$, on voit que

$\varepsilon = 5^{mm}$. Et, pour faire en sorte que H soit augmenté de ε, il suffit que la lecture supérieure sur la mire soit trop forte de ε, ce qui sera réalisé s'il existe sur la stadia, entre les points A et B, une division trop courte précisément de cette quantité ε, ce qui est possible vu la petitesse de ε. C'est à cet artifice qu'a eu recours le colonel Goulier dans la construction de sa stadia, antérieurement à l'invention de l'anallatisme. Il en résulte, comme on voit, pour l'opérateur, la sujétion de comprendre toujours la division réduite entre les points A et B visés, et aussi l'inconvénient de ne pouvoir, le cas échéant, utiliser la stadia comme mire pour le nivellement. Enfin, ainsi qu'on l'a vu au numéro précédent, la stadia étant tenue verticalement, on commet, en réduisant la distance à l'horizon par la formule (2 *bis*), une erreur donnée par la formule (3).

30. *Lunette anallatique de Porro. Tachéomètre.* — Pour ces diverses raisons il est préférable d'introduire dans la lunette un dispositif propre à rendre inutile tout calcul de correction en ramenant le point à partir duquel se mesurent les distances en coïncidence avec le point O. Un tel dispositif a été imaginé par l'ingénieur piémontais Porro qui a donné aux lunettes ainsi modifiées le nom de *lunettes anallatiques*. Voici comment est constituée une telle lunette (*fig.* 35) : en arrière de l'objectif ab plaçons une lentille $a_1 b_1$, dite

Fig. 35.



verre anallatiseur, qui soit située entre ab et son foyer postérieur. Alors les rayons $a_0 a_1$ et $b_0 b_1$ parallèles à l'axe, après avoir passé par le foyer F_1 du verre anallatiseur $a_1 b_1$, se réfractent suivant aA et bB qui convergent en un point O, dit *centre d'anallatisme*, situé en arrière de ab et qu'on peut, comme on va voir, placer sur l'axe vertical de l'instrument.

Appliquant, en effet, la formule des lentilles aux rayons issus de F_1,

dont O est le conjugué par rapport à ab, on a

$$(1) \qquad \frac{1}{\delta - f_1} - \frac{1}{d} = \frac{1}{f}.$$

On peut donc disposer de δ de façon que d soit précisément la distance du centre optique de l'objectif à l'axe vertical de l'instrument.

La figure montre ensuite que l'on a

$$\frac{H}{h'} = \frac{D}{d}$$

et

$$\frac{h'}{h} = \frac{\delta - f_1}{f_1};$$

d'où en multipliant

$$\frac{H}{h} = \frac{D(\delta - f_1)}{d f_1},$$

ce qui donne

$$D = \frac{H d f_1}{h(\delta - f_1)}.$$

Mais de l'égalité (1) on tire

$$\frac{d}{\delta - f_1} = \frac{d}{f} + 1 = \frac{d + f}{f}.$$

Portant cette valeur dans l'expression de D, en posant, comme ci-dessus, $d + f = C$, on a

$$D = H \frac{f_1 C}{h f}.$$

On peut disposer de la constante h de façon que le rapport

$$\frac{f_1 C}{h f} = \lambda$$

ait une valeur simple, 100 par exemple. D s'obtiendra alors immédiatement; si la mire est graduée en centimètres la différence des lectures faites sur les fils du réticule donnera, en mètres, la distance D du point situé sur l'axe vertical de l'instrument à la stadia. Il ne reste plus qu'à réduire à l'horizon par une des formules (1), (2) ou (3) du n° 27.

Sur la mesure d'une longueur de 50^m à 150^m, cet instrument donne une erreur moyenne relative de $\frac{1}{1000}$.

En rendant anallatique la lunette d'un théodolite, de façon que cet

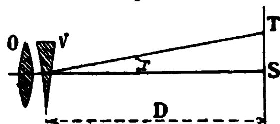
instrument permette de déterminer les distances en même temps que les angles, on obtient un *tachéomètre*. La correction à apporter aux distances par suite de la non-horizontalité des visées se déduit de l'inclinaison lue sur le cercle vertical.

Le premier instrument de ce genre a été construit par Porro. Depuis lors, d'autres modèles ont été établis, en particulier par Moinot, qui fut, en France, le vulgarisateur de la méthode tachéométrique (¹), et par Brunner.

Le tachéomètre Goulier, construit par Brosset, est employé exclusivement par le Service géographique de l'Armée pour les levers actuels au $\frac{1}{10000}$.

31. *Diastimomètre Sanguet.* — Le principe de la méthode stadimétrique consiste, en somme, à prendre la longueur d'une mire, comprise, à la distance que l'on veut évaluer, entre deux directions faisant entre elles un angle constant très petit. Cet angle est déterminé, dans le procédé ci-dessus décrit, par les rayons visuels rencontrant deux fils horizontaux tendus dans le plan du réticule. Un autre dispositif, imaginé par M. Sanguet, qui lui a donné le nom de *diastimo-*

Fig. 36.



mètre, consiste à faire naître cet angle constant au moyen de la déviation du rayon de visée, produite par un prisme d'angle très aigu enchâssé dans une monture que l'on peut adapter à l'objectif de la lunette d'un théodolite quelconque (*fig.* 36).

Si H est la différence des lectures faites sur la stadia, au fil horizontal du réticule de la lunette, sans prisme ou avec le prisme rabattu sur l'objectif, et si r est la déviation produite par le prisme, on a

$$D = \frac{H}{\tang r}.$$

Il suffit donc que, par construction, $\tang r$ soit un nombre simple, $\frac{1}{100}$ par exemple, pour que la lecture H fasse immédiatement con-

(¹) J. Moinot, *Levers de plans à la stadia,* 3ᵉ édition. Paris, Dunod, 1877.

naître D. Il faudra toutefois ajouter à cette distance celle du prisme V à l'axe vertical de l'instrument.

Il résulte d'expériences faites par M. Prévot que la précision donnée par le diastimomètre est au moins égale à celle obtenue avec une lunette stadimétrique.

La correction de réduction à l'horizon devra, bien entendu, oujours être appliquée. Toutefois, M. Sanguet a complété le diastimomètre d'une façon extrêmement ingénieuse, de façon à obtenir automatiquement et sans calcul cette réduction à l'horizon.

Supposons d'abord le diastimomètre disposé de façon que l'arête du prisme soit horizontale (position qui s'obtient en faisant tourner la monture de ce prisme autour de l'axe de la lunette, jusqu'à ce que le rabattement du prisme sur l'objectif ne produise aucun déplacement de l'image du fil *vertical* du réticule). Si la différence des lectures faites sur la stadia tenue verticalement est H, on a alors pour la distance *réduite à l'horizon* de l'objectif à cette stadia

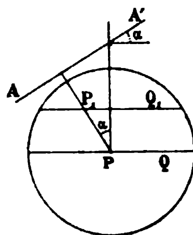
$$D_0 = 100\,H \cos^2 i,$$

ou, si le théodolite donne directement (comme l'a supposé l'auteur) la distance zénithale z de la ligne de visée,

$$D_0 = 100\,H \sin^2 z.$$

Si, alors, nous inclinons l'arête du prisme d'un angle α à partir de sa position initiale, horizontale, la déviation produite par le prisme *dans tout plan vertical* est multipliée par $\cos\alpha$. En effet, le point vu d'abord en P (*fig.* 37) est dévié par le prisme d'arête AA′, normale-

Fig. 37.



ment à cette arête en P_1. Donc le trait horizontal PQ, qui coïncidait d'abord avec le fil horizontal du réticule, a été dévié en P_1Q_1, et l'écartement par rapport à PQ est bien donné par $PP_1 \cos\alpha$.

Si donc la différence des lectures était H quand l'arête AA′ du

prisme était horizontale, elle est maintenant

$$H' = H \cos\alpha.$$

Il suffit, par suite, qu'on prenne l'angle α tel que

$$\cos\alpha = \sin^2 z$$

pour que l'on ait

$$D_0 = 100 H'.$$

De là l'artifice de M. Sanguet, qui consiste à marquer, sur la lunette et sur le manchon du diastimomètre, deux index qui se prolongent lorsque l'arête du prisme est horizontale et à porter sur le manchon, à partir de son index, la graduation définie par

$$\alpha = \text{arc}\cos(\sin^2 z).$$

Les choses étant ainsi disposées, ayant lu la distance zénithale z de la visée que l'on fait, on n'a qu'à tourner le manchon du diastimomètre jusqu'à ce que le trait z de sa graduation coïncide avec l'index marqué sur la lunette, pour que la différence des lectures faites sur la stadia donne directement la distance réduite à l'horizon ([1]).

32. *Tachéographe Schrader.* — Dans le tachéographe imaginé par M. Schrader, le distingué chef du service géographique de la maison Hachette, le principe énoncé au n° 26, pour la mesure optique des distances, est appliqué sous la forme de sa seconde variante.

A cet effet, sur la mire, tenue cette fois horizontalement, le segment H compris entre les deux points visés [déterminés par les axes de deux voyants carrés à bande centrale blanche (*fig.* 42)] est fixe, et, dans la lunette, la distance entre les fils parallèles (ici verticaux),

---

([1]) Nous ajouterons, pour n'y pas revenir, que la différence de cote entre le centre de l'objectif et le point visé sur la stadia étant donnée par $100 H \sin z \cos z$, il suffit de placer aussi sur le manchon la graduation α définie par

$$\cos\alpha = \sin z \cos z$$

ou

$$\alpha = \text{arc}\cos\left(\frac{\sin 2z}{2}\right),$$

pour que la différence des lectures données par le prisme placé dans cette nouvelle orientation fasse connaître la différence des cotes.

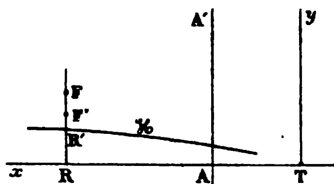
tendus dans le plan du réticule, est variable. On a obtenu ce résultat en rendant l'un d'eux fixe et l'autre mobile (¹).

Si l'on se reporte au nº 28 et à la figure 34, on voit qu'on a, pour la distance D′ du foyer antérieur de l'objectif à la stadia,

$$D' = \frac{fH}{h}, \tag{1}$$

f étant la distance focale de cet objectif et h l'écartement variable des fils. Dès lors, la figure 38 étant supposée faite sur un plan mené par

Fig. 38.



l'axe de rotation AA′ de la lunette perpendiculairement au plan du réticule, dans lequel R et R′ sont deux points, l'un fixe comme le fil F, l'autre entraîné par le fil mobile F′, portons sur la perpendiculaire RA à l'axe de rotation le segment AT égal à une fraction simple de la distance D′, par exemple $\frac{D'}{1000}$.

Si nous posons

$$RA = a, \quad RF = b, \quad R'F' = b', \quad RT = x, \quad RR' = y,$$

nous avons

$$x = a + \frac{D'}{1000}, \qquad y = b - b' - h.$$

Si donc, f et H étant ici constants, nous posons, en outre,

$$fH = 1000\,c,$$

nous voyons que l'équation (1) devient

$$x - a = \frac{c}{b - b' - y},$$

(¹) On pourrait mesurer l'écartement de ces fils au moyen d'une vis micrométrique commandant les déplacements du fil mobile. Tel est le principe d'un instrument qui ne semble guère employé en France et qui a reçu le nom de *chorismomètre*.

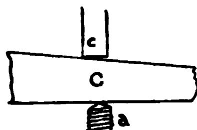
ou, en posant encore $b - b' = \beta$,

$$(2) \qquad (x - a)(y - \beta) + c = 0.$$

Imaginons que, par rapport aux axes Tx et Ty, liés au point T lorsque celui-ci parcourt la droite RA, on construise la courbe d'équation (2) qui est une hyperbole équilatère $\mathcal{H}$. Alors, lorsque le point T sera à une distance de A égale à $\frac{D'}{1000}$, l'écartement des fils étant celui qui correspond à cette distance D', l'hyperbole $\mathcal{H}$ passera par la position correspondante du point R'. Inversement, si cette hyperbole $\mathcal{H}$ est matérialisée sous la forme d'une came s'appuyant constamment sur le point R' tandis que son bord rectiligne glisse le long de RA, *lorsque les fils* F *et* F' *seront à l'écartement voulu* (c'est-à-dire lorsqu'ils bissecteront les voyants de la mire) *le point* T *lié à cette came sera à une distance de l'axe* AA' *égale à* $\frac{D'}{1000}$.

En vue de la réalisation de ce dispositif, le fil (ou plutôt le trait) mobile, est marqué sur une glace fixée à demeure sur un chariot qui en assure le déplacement rectiligne, perpendiculairement à l'axe optique de la lunette, en s'appuyant constamment par l'arête vive d'un couteau c (*fig.* 39), en acier trempé dur, sur la came C, de même

Fig. 39.



métal, qui réalise l'hyperbole $\mathcal{H}$ de la figure 38, et qui, par son côté rectiligne, s'appuie sur l'extrémité trempée d'une vis en acier a.

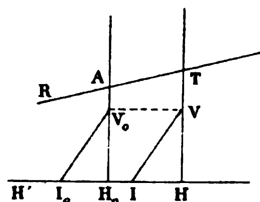
Supposons maintenant que, par construction, le point T, variable le long de AT, glisse en même temps le long du côté vertical VH d'une équerre VHI (*fig.* 40) entraînée par lui, et dont le côté IH glisse le long d'une règle horizontale HH'.

Si l'on marque sur cette règle la position I_0 que prend le point I lorsque le côté VH de l'équerre coïncide avec l'axe vertical V_0H_0 de l'instrument, on voit que la distance I_0I, égale à H_0H, fait connaître la projection horizontale de AT, c'est-à-dire, à l'échelle du $\frac{1}{1000}$, la projection horizontale de la distance D'. Une graduation convenable

placée le long de HH′ fera donc connaître directement cette distance D'_0 réduite à l'horizon.

Si, comme précédemment, nous représentons par C la somme de la distance focale de l'objectif ($0^m,30$) et de la distance de cet

Fig. 40.



objectif à l'axe de rotation de la lunette ($0^m,17$), nous aurons, en appelant i l'inclinaison de la ligne de visée sur l'horizon, la formule

$$(3) \qquad D_0 = D'_0 + C\cos i$$

pour la distance horizontale du centre de l'instrument au point sur lequel est placée la stadia. Vu la petitesse du terme correctif, et le peu de différence entre $\cos i$ et 1, l'instrument ne permettant pas les visées au delà de $i = 30^G$, on a substitué à cette formule la formule approchée (1)

$$(3\ bis) \qquad D_0 = D'_0 + C,$$

et rendu dès lors la lecture de D_0 immédiate en reculant l'origine I_0 ci-dessus définie de la quantité $\frac{C}{1000} = 0^{mm},47$.

La figure 41 montre la disposition de l'instrument. L'axe principal placé au centre d'un plateau sur lequel, au moment de l'opération, se fixe un disque de zinc, peut être rendu vertical, grâce aux indica-

(1) L'instrument étant construit pour donner les distances à 5^{cm} près, il ne faudrait pas que l'erreur commise en trop

$$\Delta D_0 = C(1 - \cos i) = 47^{cm}(1 - \cos i)$$

dépassât cette limite. La valeur de i correspondante sera donnée par

$$47(1 - \cos i) = 5,$$

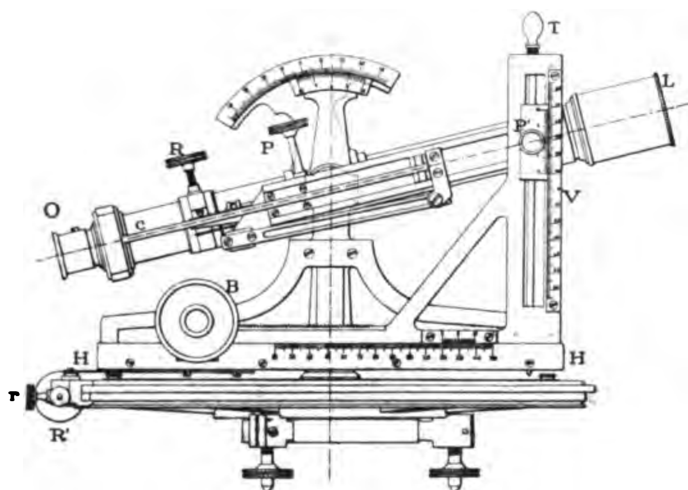
d'où l'on tire

$$i = 30^G \text{ environ},$$

ce qui est précisément la limite des inclinaisons permises par l'instrument.

tions d'un niveau à bulle, à l'aide d'un système de trois vis calantes. Cet axe principal porte l'axe de rotation horizontal de la lunette que l'on peut fixer sous une inclinaison quelconque, de 0^G à 30^G, au moyen de la vis de pression P et de la vis de rappel R. La came hyperbolique, vue par la tranche en *c*, amène dans la position voulue, sur

Fig. 41.



une ligne parallèle à l'axe optique de la lunette, le point désigné par T sur la figure 40, qui, sur la figure 41, se projetterait au centre du cercle P' (représentant la tête d'une vis de pression adaptée au coulisseau mobile le long de la règle verticale V). Un traçoir vertical T permet de marquer la projection horizontale de ce point sur le disque de zinc qui reçoit, par conséquent, le report des points au fur et à mesure qu'ils sont levés (¹).

Le bord du plateau horizontal formant limbe est divisé en grades, et le long de cette graduation se déplace un vernier au $\frac{1}{20}$ (donnant par conséquent les 5^{cG}) qui est lié à la lunette.

Un éclimètre, également lié à cette lunette, fait connaître son inclinaison sur l'horizon avec la même approximation.

L'échelle de la règle horizontale HH fait connaître les distances en

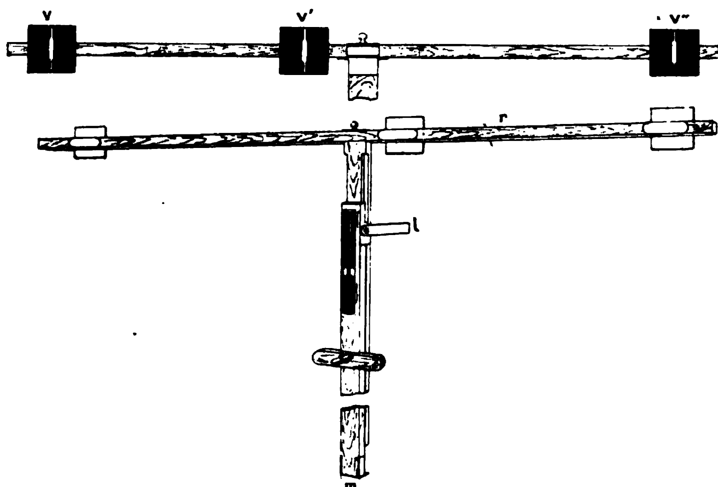
(¹) Il suffit, sur le disque employé en chaque station, de repérer les directions des stations voisines, pour rattacher les uns aux autres les levers obtenus sur les différents disques.

mètres (représentés sur cette échelle par des millimètres). Un vernier au $\frac{1}{20}$ permet d'avoir l'approximation des 5^{cm}.

On amène d'ailleurs les fils du réticule à l'écartement voulu en agissant sur le bouton B qui, par l'intermédiaire d'une crémaillère, imprime à l'équerre V des déplacements horizontaux que la came hyperbolique transforme en déplacements correspondants du fil mobile.

La manœuvre est donc celle-ci : la lunette étant dirigée sur la mire horizontale (*fig.* 42), on serre les vis de pression P et *r* (*fig.* 41), puis, ayant amené, au moyen de la vis de rappel R, le fil horizontal

Fig. 42.



du réticule en coïncidence avec l'axe de la mire, on agit simultanément sur la vis de rappel R' pour bissecter l'un des voyants V avec le fil fixe, et sur le bouton B pour bissecter l'autre voyant V' avec le fil mobile (¹). Il suffit, à ce moment, d'appuyer sur le traçoir T pour

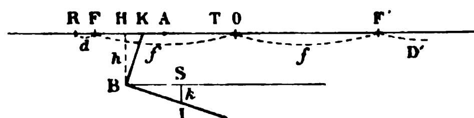
(¹) Pour le fil mobile, il y a deux voyants, V' et V'' (*fig.* 42), l'un servant pour les distances de 20^m à 50^m, l'autre pour les distances de 50^m a 120^m (limite de la portée à l'échelle du $\frac{1}{1000}$). A chacun des intervalles déterminés sur la mire par ces voyants correspond, bien entendu, sur la came, l'arc d'une hyperbole différente; ces deux arcs se font, d'ailleurs, immédiatement suite. Si l'on veut changer d'échelle, il faut, pour la même came, faire varier en raison inverse les intervalles de la mire; par exemple, pour l'échelle du $\frac{1}{2000}$, il faut prendre entre les voyants des intervalles doubles des précédents. Les lectures de distances faites sur l'instrument doivent aussi, bien entendu, être doublées.

marquer le point relevé sur le disque de zinc. On peut lire, en même temps, son azimut sur le limbe, sa distance sur la règle horizontale HH et même sa cote au-dessus du point où l'on est en station sur la règle verticale HV [1].

33. *Mise au point automatique.* — La rigueur des résultats fournis par le tachéographe Schrader dépend évidemment de l'exacte mise au point de l'image de la mire. Il faut que cette image se forme exactement dans le plan du réticule contenant les deux fils pour qu'on puisse, avec ces fils, bissecter les deux voyants de la mire. Or, pour simplifier le mécanisme dont la came hyperbolique est l'organe essentiel, on a dû immobiliser le réticule de la lunette; c'est donc l'objectif qui a dû être rendu mobile. M. Carpentier, le constructeur de l'instrument, qui en a étudié avec grand soin tous les détails mécaniques, a conçu un dispositif fort ingénieux qui assure automatiquement la mise au point, c'est-à-dire qui place l'objectif à la distance du réticule convenant à cette exacte mise au point lorsque les fils de ce réticule sont à l'écartement voulu. Le principe de ce dispositif peut être ainsi exposé :

Soient R le centre du réticule fixe (*fig.* 43), O le centre de l'objectif mobile avec ses deux foyers F et F'. Si la mise au point est

Fig. 43.



effectuée, c'est-à-dire si l'image de la mire située à la distance D' du foyer F' se fait dans le plan du réticule distant de d du foyer F, on a, f étant la distance focale de l'objectif,

$$\frac{1}{f+d}+\frac{1}{f+D'}=\frac{1}{f}$$

[1] Pour obtenir cette différence de cote, il suffit de placer la mire horizontale à une hauteur, au-dessus du pied de la règle verticale qui la supporte, égale à la hauteur de l'axe de rotation de la lunette (auquel correspond le o de la graduation de l'échelle HV) au-dessus du point où l'on est en station. Il va sans dire que, comme pour les distances horizontales, si l'échelle est prise au $\frac{1}{2000}$, les cotes lues doivent être doublées.

ou

(1) $$D'd = f^2.$$

B étant un point fixe par rapport au réticule, il est facile de faire déplacer, sur la parallèle à l'axe de la lunette menée par le point B, un point S entraîné par le point T de la figure 40, et tel qu'on ait constamment, A étant (comme sur la *fig.* 40) l'axe de rotation de la lunette,

$$BS = AT = \frac{D'}{1000}.$$

Au point S sera fixé un doigt SI, perpendiculaire à BS, dont l'extrémité I sera constamment en prise avec un côté BI d'une équerre de sommet B [1], mobile autour de ce sommet. L'autre côté BK de cette équerre sera constamment en prise avec un bouton K lié invariablement à l'objectif (qui, par conséquent, déterminera sa distance au réticule), et tel que la distance FK de ce bouton au foyer postérieur F soit égale à la distance fixe du réticule R à la projection H du point B sur l'axe de la lunette. Si l'on pose $BH = h$, $SI = k$, on voit que

$$\frac{HK}{h} = \frac{k}{BS}$$

ou, puisque $FK = RH$, et, par suite, $HK = RF$,

$$RF \times \frac{D'}{1000} = hk,$$

si donc, par construction, $hk = \frac{f^2}{1000}$, on a

$$RF \times D' = f^2,$$

ce qui, par comparaison avec l'équation (1) ci-dessus, montre que $RF = d$, c'est-à-dire que le foyer postérieur F de l'objectif, et, par conséquent, cet objectif lui-même, est à la distance du réticule qui convient à la mise au point exacte pour la distance D′ considérée. On peut remarquer que cette mise au point fait varier la distance du foyer antérieur F′ à l'axe A, c'est-à-dire la constante C du numéro précé-

---

[1] Cette mise en prise a lieu par l'insertion d'un bouton, dont le centre coïncide avec le point I, dans une rainure dirigée suivant l'axe BI du côté correspondant de l'équerre, bouton et rainure qui sont visibles sur la figure 41, au-dessous de la lunette.

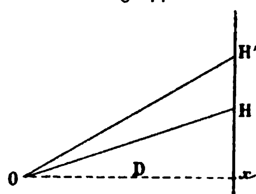
dent, mais cette variation n'étant que de 4^{mm} environ, quand D' varie entre ses limites extrêmes (de 20^m à 120^m), il n'y a pas lieu d'en tenir compte.

34. *Procédé de la variation de pente.* — La mesure optique des distances par le procédé de la lunette stadimétrique a l'inconvénient d'exiger un calcul de réduction à l'horizon (1). Or ce procédé est fondé sur l'emploi de deux visées faites *sous des inclinaisons dont la différence est constante.* Si, à cette différence constante entre les inclinaisons, on substitue une différence constante entre leurs tangentes trigonométriques, c'est-à-dire si l'on donne à la ligne de visée une *variation constante de pente,* on obtient un dernier procédé de mesure des distances, dû à M. Sanguet, qui, grâce à quelques perfectionnements de détail, a permis d'atteindre à une grande précision et dont l'emploi est très avantageux dans les opérations topométriques parce qu'il fournit directement, sans calcul de correction, les distances réduites à l'horizon.

Voici le principe théorique sur lequel est fondé ce procédé :

Supposons que l'on vise successivement avec un clisimètre deux points d'une mire graduée placée verticalement (*fig.* 44). Sous la

Fig. 44.



pente p on fait la lecture H, sous la pente p' la lecture H'. La direction de l'horizontale sur laquelle doit être comptée la distance D correspondrait à une division inconnue x de la mire ; on a immédiatement les relations

$$D = \frac{H - x}{p} = \frac{H' - x}{p'} = \frac{H' - H}{p' - p}.$$

(1) On a, il est vrai, dressé des Tables qui donnent immédiatement le résultat de ce calcul, construit aussi des tachéomètres (tel, celui de M. Champigny), opérant cette réduction au moyen d'un mécanisme plus ou moins compliqué. Cela n'enlève rien à l'importance du procédé ici décrit qui donne les distances toutes réduites à l'horizon sans aucun calcul et sans mécanisme spécial.

Les pentes p et p' étant quelconques, on peut les choisir telles que $p' - p = \frac{1}{100}$. Dans ce cas $D = 100(H' - H)$, et l'on voit que ce résultat est indépendant de l'inclinaison de OH sur l'horizon.

Contrairement à ce qu'on est tenté de croire *a priori*, ce procédé, simplement appliqué avec un niveau de pente ordinaire, n'est pas d'une extrême rigueur.

Il résulte, en effet, d'expériences très précises de M. Sanguet que l'œil armé d'une loupe juge, en général, de la coïncidence de deux traits avec une erreur moyenne quadratique de $\frac{1}{80}$ de millimètre. Cela semble, au premier abord, constituer une extrême précision.

Mais ce qu'il faut apprécier, c'est l'influence de cette erreur sur l'évaluation de la distance.

Supposons que le niveau de pente ait 20^{cm} de long. En prenant pour $p' - p$ la valeur $\frac{1}{100}$ cela correspond à une différence de 2^{mm} lue sur l'échelle verticale de l'instrument; l'erreur e_2 sur la coïncidence des traits étant de $\frac{1}{80}$ de millimètre, représente $\frac{1}{160}$ de la longueur à observer sur cette échelle; cela revient à dire que l'erreur moyenne quadratique *relative* sur chaque lecture, dans les deux positions du viseur, est de $\frac{1}{160}$; sur la différence de ces lectures, elle sera donc de $\frac{\sqrt{2}}{160}$ ou $\frac{1}{113}$. On voit donc que, sur l'évaluation d'une longueur de 113^{m}, on aura une erreur moyenne quadratique de 1^{m}. Cette précision est tout à fait insuffisante.

Le procédé pour acquérir toute sa valeur doit être mis en œuvre d'une autre façon qui ne fasse pas intervenir l'œil dans l'appréciation de la variation de pente de la ligne de visée. M. Sanguet a eu l'excellente idée d'obtenir cette variation de pente au moyen de contacts réalisés mécaniquement par des buttoirs dans l'instrument que nous allons maintenant examiner.

35. *Tachéomètre autoréducteur Sanguet.* — Comme les autres types de tachéomètre, celui-ci comprend un goniomètre horizontal, répétiteur, muni d'un niveau à bulle et d'un déclinatoire (du type décrit à la fin du n° **15**), et reposant sur trois vis calantes.

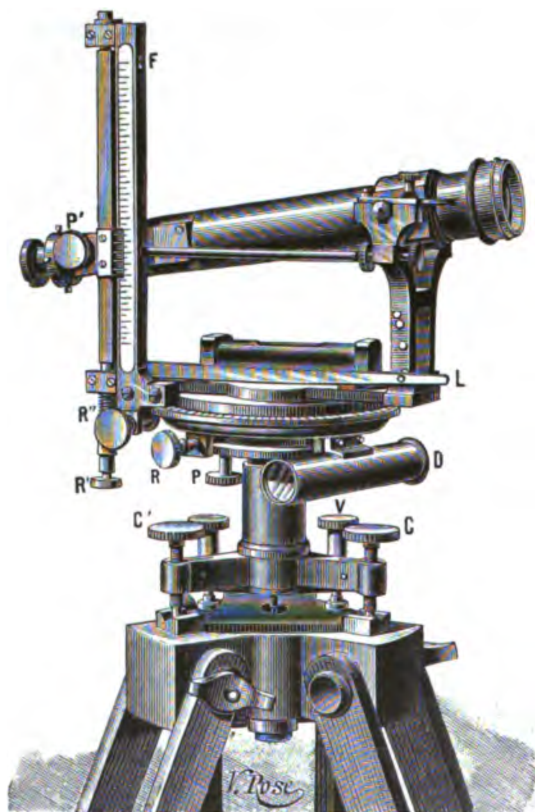
Le limbe est divisé en grades; les verniers complémentaires décrits au n° **11** donnent l'approximation du centigrade.

Voici, maintenant, comment est disposé le clisimètre stadimétrique :

La lunette, mobile à une de ses extrémités autour de l'axe de deux

tourillons portés par une fourche, glisse par sa seconde extrémité le long d'un coulisseau engagé à ses deux bouts dans les retours d'équerre que porte la règle verticale F du clisimètre. Ce glissement se fait par l'intermédiaire du curseur muni de vernier qui sert à la lecture du clisimètre et peut être fixé au coulisseau au moyen de la vis de pres-

Fig. 45.



sion P'. Le coulisseau peut d'ailleurs recevoir, le long de la règle F, de petits déplacements grâce à un levier L actionnant l'écrou de la vis de rappel R' qui permet de rectifier le pointé dans le sens vertical lorsque la vis P' est serrée. Ce levier, dont (sous l'action du poids de la lunette, accrue de celle d'un ressort) le grand bras tend toujours à se relever, peut buter contre quatre taquets, en métal très dur, qui se voient sur le montant de la fourche et, lorsqu'il passe de l'un

à l'autre, le coulisseau a des déplacements constants qui correspondent pour l'axe de la lunette, quelle que soit son inclinaison initiale, aux accroissements de pente suivants :

Du 1er au 2e taquet	....	0,01
» au 3e »	....	0,018
» au 4e »	....	0,022

Si donc α, β, γ, δ sont les lectures faites au fil de la lunette dans les quatre positions du levier, on a pour la distance horizontale D, en posant $\beta - \alpha = \beta_1$, $\gamma - \alpha = \gamma_1$, $\delta - \alpha = \delta_1$,

$$D = \frac{\beta_1}{0,01} = \frac{\gamma_1}{0,018} = \frac{\delta_1}{0,022} = \frac{\gamma_1 + \delta_1}{0,04} = \frac{\beta_1 + \gamma_1 + \delta_1}{0,05}.$$

La première de ces expressions fait immédiatement connaître la distance D. Les deux dernières, d'un calcul également facile, offrent un moyen immédiat de contrôle.

Mais on n'a pas recours à ce moyen de contrôle d'une façon permanente, le réservant pour les points qui doivent être déterminés avec une précision particulière. Par exemple, s'il s'agit d'un lever d'étude relatif au tracé d'une voie de communication, on ne l'appliquera que pour les sommets de la ligne de cheminement.

Il faut, en outre, remarquer que la distance D est comptée à partir de l'axe de rotation de la lunette. Il faut donc lui ajouter la distance de cet axe de rotation à l'axe vertical de l'instrument, qui, par construction, est égale à 10^{cm}.

La précision du stadimètre Sanguet est telle que, sur une longueur de 100^m à 150^m, on arrive, en ne se servant même que du premier couple de buttoirs, à une erreur moyenne relative de $\frac{1}{2000}$ environ, alors que, dans ces conditions, un niveau de pente ordinaire donnerait une erreur moyenne voisine de $\frac{1}{100}$.

De façon plus précise, M. Sanguet estime qu'en se bornant à la lecture β_1 on a une erreur moyenne quadratique sur la distance D donnée par

$$e_2 = 0^m,04 + \frac{D}{4000},$$

et, avec la somme des trois lectures β_1, γ_1, δ_1,

$$e_2 = 0^m,02 + \frac{D}{10000}.$$

Avec un tachéomètre Sanguet et une mire (du type indiqué sur la figure 13), on fait aisément à la fois toutes les opérations que comporte un lever topométrique, sans avoir à recourir à aucun calcul de réduction. Le goniomètre sur lequel est monté l'instrument permet de mesurer les angles horizontaux; le déclinatoire D (*fig.* 45) (du type décrit au nº 15) donne les azimuts, tandis que les lectures faites sur la mire font connaître à la fois les distances horizontales et les différences de niveau, en se combinant, pour ces dernières, avec les lectures faites sur le clisimètre, ainsi qu'on le verra plus loin (nº 51).

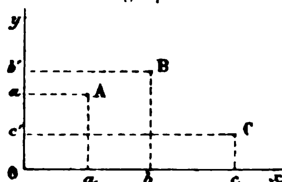
III. — Méthodes générales de la planimétrie.

36. *Principe des méthodes usuelles.* — En combinant de façon rationnelle des mesures d'angles et des mesures de distances, obtenues par les procédés qui viennent d'être décrits, on peut lever la projection horizontale d'une certaine étendue de terrain.

La mise en œuvre de ces procédés s'effectue suivant plusieurs méthodes qui correspondent aux diverses manières de définir les points d'un plan au moyen de coordonnées vectorielles ou angulaires.

On peut notamment rapporter la position d'un point à deux axes rectangulaires par son *abscisse* et son *ordonnée* (*fig.* 46). De là une

Fig. 46.

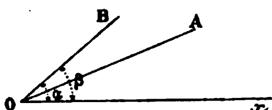


méthode de lever qui consiste à abaisser, des divers points à relever, des perpendiculaires sur un alignement droit au moyen d'une équerre et à mesurer : 1º les longueurs de ces perpendiculaires; 2º les distances comprises entre leurs pieds, mesures qu'on effectue en général à la chaîne ou au ruban d'acier.

Comme vérification, on peut d'abord mesurer directement les segments O*a*, *ab*, *bc*, ..., puis chaîner de façon continue la base totale O*abc*, ..., en relevant au passage les points *a*, *b*, *c*, ..., ou encore, effectuer ce chaînage continu en revenant de *c* vers O.

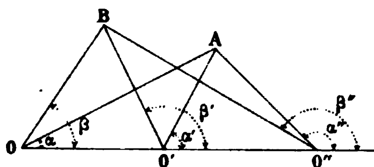
On peut employer aussi le système des coordonnées polaires, d'où la *méthode du rayonnement* pour laquelle l'emploi du tachéomètre est particulièrement commode (*fig.* 47). On opère par tour d'horizon en prenant pour chaque point visé l'angle d'orientation et la longueur du rayon vecteur.

Fig. 47.



On peut enfin se servir des coordonnées bipolaires, en déterminant un point A par la rencontre de deux lignes de visée partant de deux points déjà reportés, c'est-à-dire par les angles α, α' comptés (toujours dans le sens direct) à partir de la droite joignant les deux stations (*fig.* 48). C'est la *méthode des intersections.*

Fig. 48.



Comme vérification, il sera bon de choisir une troisième station O'' sur le prolongement de OO' et de mesurer également les angles polaires α'', β'', ..., des points A, B, ... vus de cette station O''. Les droites telles que OA, O'A, O''A devront, lors du report du lever sur le papier, converger en un même point.

Chaque point nouvellement obtenu peut être pris avec le précédent pour la détermination du point suivant par le même procédé. On obtient ainsi la *méthode de la triangulation.*

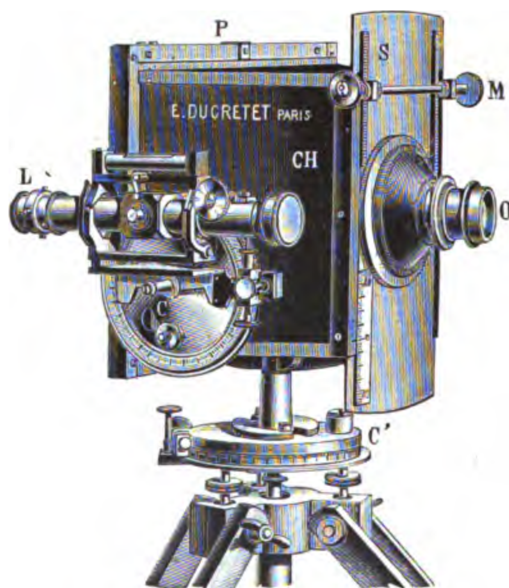
Enfin, on emploie une méthode dont le principe peut être rattaché à la notion des coordonnées intrinsèques; c'est la *méthode du cheminement.* Elle consiste à mesurer successivement les côtés et les angles d'une ligne polygonale ayant pour sommets les divers points à relever, pris dans un certain ordre. D'ailleurs, chacun des côtés de cette ligne peut être orienté par la mesure, au moyen du déclinatoire, de son azimut magnétique que l'on corrige ensuite de la déclinaison

pour obtenir l'azimut géographique. On reviendra plus loin (n°s 39 et suivants) sur les vérifications à faire dans le cas du cheminement.

Dans les levers exécutés en vue des travaux publics, plusieurs des méthodes ci-dessus indiquées interviennent simultanément (n° 46).

37. *Lever photographique du colonel Laussedat.* — Le colonel Laussedat a eu l'idée de définir les directions intervenant dans la méthode des intersections par leur trace sur un plan vertical constitué pour chaque station par une plaque photographique; c'est-à-dire que la méthode consiste à effectuer photographiquement la perspective du terrain à lever, pour deux points de vue préalablement

Fig. 49.

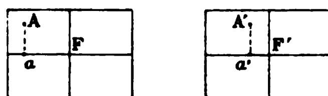


déterminés. La chambre photographique destinée à cet usage est liée à un goniomètre, muni d'un niveau à bulle, qui sert à la mesure des angles horizontaux (1) (*fig.* 49). La ligne d'horizon est déterminée par l'intersection de la plaque sensibilisée avec le plan horizontal

(1) Le colonel Laussedat a perfectionné progressivement le type de son appareil, auquel il a donné le nom de *photothéodolite*. Pour les détails relatifs à la question, consulter l'Ouvrage cité à la fin du présent numéro.

passant par le centre de l'objectif. Le point de fuite principal F est la trace de l'axe de l'objectif sur la plaque. Ces éléments de repérage sont marqués à l'avance sur la plaque (*fig.* 50). Pour reporter sur le

Fig. 50.

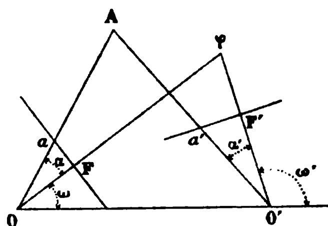


plan les points A dont on a la photographie sur les deux clichés, voici comment on opère :

On abaisse sur le premier cliché les perpendiculaires A*a* sur la ligne d'horizon et l'on relève le point principal de fuite F et les points *a* sur le bord rectiligne d'une bande de papier qu'on vient appliquer le long de la ligne d'horizon. De même, pour le second cliché.

Les directions OF et O′F′ étant définies sur le plan par les angles ω et ω′ qu'elles font avec la direction OO′ (*fig.* 51) (angles que donne

Fig. 51.



le goniomètre de l'appareil), si l'on connaît la distance principale OF, il suffit, sur une perpendiculaire élevée en F à OF, de reporter les points *a* marqués, comme il a été dit, sur une bande de papier, pour avoir, en joignant ces points *a* au point O, les directions O*a* des points A. En faisant la même opération avec le second cliché pris du point O′, on obtient les droites O′*a*′ qui, par leur rencontre avec les droites O*a*, donnent les points A.

Il est même inutile de connaître les distances principales OF et O′F′ si l'on détermine, pour un seul point A, les azimuts α et α′ comptés à partir de OF et de O′F′.

En effet, ayant tiré les droites OF, O′F′, puis, grâce à la connaissance des angles α et α′, les droites OA et O′A, on n'a qu'à placer les échelles relevées sur les lignes d'horizon perpendiculairement l'une

à OF, l'autre à O'F', en faisant en sorte que les points F et a tombent respectivement sur les droites OF et OA, les points F' et a' sur O'F' et O'A. Avec ce procédé, qui sera évidemment employé de préférence, on voit que le retrait de l'image photographique, qui peut se produire au cours des manipulations ayant pour objet de la révéler et de la fixer, est sans inconvénient.

Afin de n'avoir pas à y revenir, nous ferons remarquer que cette méthode photographique permet, en même temps que le lever de plan, d'effectuer le nivellement. Mesurant, en effet, sur l'épreuve photographique la hauteur $Aa = z$ de l'image du point A au-dessus de la ligne d'horizon, on a pour la cote Z de ce point par rapport au plan d'horizon choisi :

$$Z = z\,\frac{OA}{Oa},$$

les longueurs Oa et OA étant mesurées sur le plan dont l'échelle est connue, puisque la base OO' a été mesurée sur le terrain.

Cette méthode est fort expéditive et très commode surtout dans les pays accidentés offrant des particularités qui s'identifient facilement d'un cliché à l'autre. Son grand avantage est de ne nécessiter qu'un très court séjour sur le terrain; aussi son emploi se recommande-t-il lorsque les conditions climatériques rendent difficile le maniement des instruments ordinaires de lever. Elle peut rendre aussi de grands services pour le lever des pays nouveaux, en cours même d'exploration, puisqu'il suffit pour cela des vues photographiques prises au moyen de l'appareil du colonel Laussedat et complétées par les quelques mesures que permet d'effectuer cet appareil. La carte d'une partie de la province d'Alaska, au Canada, où, en raison des brouillards, il était impossible d'aller sur le terrain plus de 3 mois par an, a été complètement dressée par le capitaine E. Deville au moyen de ce procédé.

M. Vallot a fait, au moyen d'un instrument différant un peu de celui du colonel Laussedat et qu'il a appelé le *phototachéomètre*, une belle application de la méthode à l'établissement de la Carte du massif du Mont-Blanc.

La mission chargée de la nouvelle mesure de l'arc de méridien de l'Équateur emploie également le photothéodolite Laussedat pour les levers expédiés des environs des stations.

Les levers photographiques, dont nous n'indiquons ici que le principe, soulèvent une foule de problèmes (dont quelques-uns même

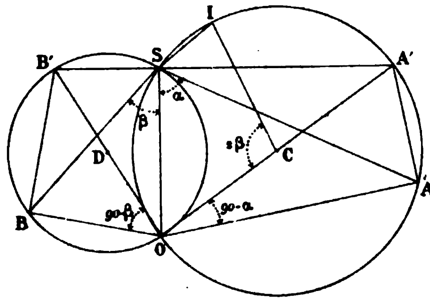
offrent un véritable intérêt géométrique; *loc. cit.*, T. II, deuxième Partie, p. 101 à 116) à propos desquels est né cet art spécial, auquel le colonel Laussedat, qui en a été l'initiateur, a donné le nom de *Métrophotographie*. Relativement à cet art, on trouvera tous les développements désirables dans le Tome II de l'Ouvrage de ce savant officier, intitulé : *Recherches sur les instruments, les méthodes et le dessin topographiques*.

38. *Relèvement.* — Un point S peut être défini par les angles sous lesquels de ce point on voit deux segments OA et OB pris sur les côtés d'un angle à l'intérieur duquel il se trouve, les points O, A et B étant des points connus sur la carte.

Cette méthode, dite de *relèvement*, est surtout employée pour rapporter un point situé en mer à des points connus d'une côte voisine (¹). On a parfois à y recourir pour les besoins des travaux publics.

Soient α, β les angles sous lesquels sont vus respectivement les segments OA et OB (*fig.* 52). Le point S se trouvera à la rencontre

Fig. 52.



des segments capables des angles α et β construits respectivement sur OA et OB; soient C et D leurs centres. M. Estignard, Ingénieur hydrographe, a fait remarquer qu'on pouvait se borner à construire un de ces segments, par exemple celui qui est capable de l'angle α relatif au côté OA. Si, en effet, la droite SB prolongée rencontre ce segment au point I, on a, par la mesure des angles dans le cercle C, $\widehat{OCI} = 2\pi - 2\widehat{OSI} = 2\pi - 2(\pi - \beta) = 2\beta$. Cela permet d'obtenir

(¹) A l'étranger, et particulièrement en Allemagne, cette méthode est fort employée aussi pour la Topométrie à terre.

directement sur le cercle C le point I qui, joint au point B, donne sur ce cercle le point S.

Mais on peut encore opérer d'une autre manière qui a l'avantage (lorsqu'on dispose d'une équerre et d'un rapporteur) de supprimer tout tracé de cercle.

Si l'on prolonge les diamètres OC et OD des deux cercles jusqu'en leurs secondes extrémités A' et B', on voit que

$$\widehat{AOA'} = \widehat{ASA'} = \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad \text{et} \qquad \widehat{BOB'} = \widehat{BSB'} = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

Il suffit donc de tirer les droites OA' et OB' déterminées par ces angles et de prendre respectivement leurs intersections avec les perpendiculaires élevées en A et en B à OA et à OB pour avoir les points A' et B' ([1]). Cela fait, les angles OSA' et OSB' étant droits, puisque inscrits dans des demi-circonférences, on a le point S en prenant le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur A'B'.

39. *Vérification des angles d'un cheminement.* — On doit s'appliquer, dans toutes les opérations topométriques, à se ménager des moyens de vérification, soit en rattachant leurs résultats à ceux précédemment obtenus au moyen d'opérations exécutées avec une plus haute précision (celles de la Géodésie), soit en fermant un cycle d'opérations devant aboutir à un résultat déterminé d'avance par des considérations d'ordre géométrique. Tel est, en particulier, le cas, comme nous allons le faire voir, pour les angles aux sommets d'un polygone de cheminement absolument quelconque (c'est-à-dire d'un ordre de connexion quelconque) lorsqu'on le referme sur lui-même.

Si l'on distingue en chaque sommet, eu égard au sens du cheminement, l'alignement passant par le sommet précédent ou alignement *arrière* et l'alignement passant par le sommet suivant ou alignement *avant*, on peut définir l'*angle topographique* en ce sommet celui dont il faut faire tourner l'alignement arrière *dans le sens direct* pour l'amener sur l'alignement avant.

Remarquons tout de suite que, d'après cette définition, deux angles

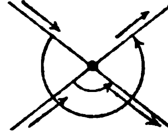
---

([1]) Si l'un des angles, α par exemple, était obtus, la différence $\frac{\pi}{2} - \alpha$ étant négative, il faudrait porter l'angle $\alpha - \frac{\pi}{2}$, à partir de OA *vers l'extérieur de l'angle* AOB.

topographiques opposés par le sommet ont une somme égale à 4 droits (*fig.* 53).

Si l'on revient après un certain cheminement au point d'où l'on est

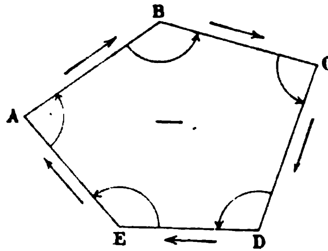
Fig. 53.



parti, la somme des angles topographiques, déterminés, comme il vient d'être dit, aux divers sommets, doit avoir une certaine valeur que nous allons obtenir.

Premier cas. — Le polygone, simplement connexe, est parcouru dans le sens rétrograde (*fig.* 54). Dans ce cas, les angles topogra-

Fig. 54.



phiques aux divers sommets sont les angles intérieurs du polygone. Leur somme Σ exprimée en angles droits est donnée par

$$\Sigma = 2n - 4,$$

en appelant n le nombre des sommets du polygone.

Deuxième cas. — Le polygone est parcouru dans le sens direct (*fig.* 55). Dans ce cas, ce sont les angles extérieurs qu'il faut prendre et l'on a, en adoptant toujours pour unité l'angle droit,

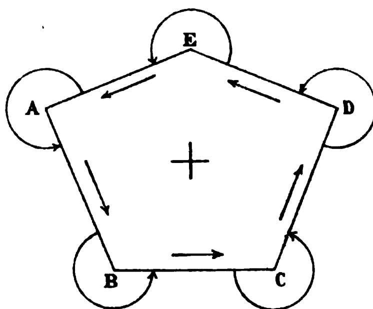
$$4n - \Sigma = 2n - 4,$$

d'où

$$\Sigma = 2n + 4.$$

Affectant le polygone du signe + ou du signe — suivant qu'il est de sens direct ou rétrograde, et appelant *excès angulaire* du polygone l'appoint de 4 droits précédé du signe du polygone, on peut dire

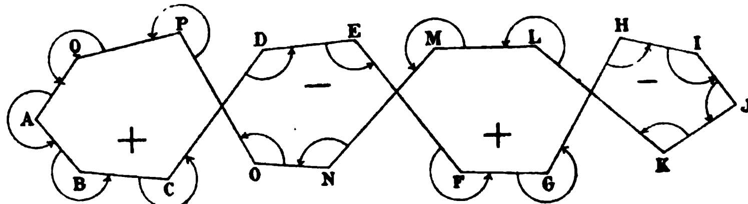
Fig. 55.



que, dans tous les cas, *la somme des angles égale* $2n$ droits *augmentés de l'excès angulaire.*

Troisième cas. — Supposons maintenant un polygone à connexion

Fig. 56.



multiple (*fig.* 56), formé par une chaîne de p polygones à connexion simple (¹).

Soient $n_1, n_2, n_3, \ldots$ les nombres de sommets de chacun des polygones composants, $E_1, E_2, E_3, \ldots$ leurs excès angulaires égaux à +4 droits pour les polygones directs, à —4 droits pour les polygones rétrogrades.

(¹) Dans la Note où, pour la première fois, nous avons fait connaître le présent théorème (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1er semestre 1901, p. 818), nous l'avons établi non pas seulement pour un polygone formé par une chaîne de polygones à connexion simple, mais pour un polygone à connexion multiple absolument quelconque.

Nous aurons

$$\Sigma_1 = 2n_1 + E_1,$$
$$\Sigma_2 = 2n_2 + E_2,$$
$$\Sigma_3 = 2n_3 + E_3.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Faisons la somme de toutes ces égalités.

En chacun des points de recoupement il y a deux angles topographiques opposés par le sommet dont, en vertu de la remarque faite plus haut, la somme égale 4 droits. La somme $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \ldots$ égale donc la somme Σ des angles du polygone total, augmentée de $p - 1$ fois 4 droits, ou

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \ldots = \Sigma + 4(p - 1).$$

Maintenant dans la somme $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots$, chacun des $p - 1$ points de recoupement est compté deux fois puisqu'il appartient à la fois à deux polygones simples. Par conséquent

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots = n + 2(p - 1).$$

Enfin les résidus E_1, E_2, E_3, ... se détruisant deux à deux, d'un polygone partiel au suivant, il restera finalement pour la somme de ces résidus $+4$, 0, ou -4 droits, qu'on appellera l'*excès angulaire* E *du polygone total*. On aura donc finalement

$$\Sigma + 4(p - 1) = 2n + 4(p - 1) + E$$

ou

$$\Sigma = 2n + E.$$

Ainsi, moyennant la définition qui vient d'être donnée de l'excès angulaire du polygone total, la formule d'abord obtenue dans le cas des polygones simples est absolument générale.

40. *Tolérance sur le résultat final.* — Dans la pratique, une vérification comme celle qui vient d'être indiquée ne se réalisera jamais rigoureusement. La somme des angles obtenus, comparée à sa valeur théorique résultant du théorème qui vient d'être démontré, fera apparaître un résidu ρ. La question se pose de fixer la limite de tolérance que ne devra pas franchir ce résidu pour que les opérations effectuées puissent être considérées comme acceptables.

Le goniomètre dont on s'est servi comportant pour la mesure de chaque angle une erreur moyenne quadratique e_2 connue, on en

déduira immédiatement l'erreur moyenne quadratique e'_2 de la somme des n angles de la ligne polygonale refermée sur elle-même par la formule

$$e'_2 = e_2\sqrt{n},$$

d'après ce qui a été vu plus haut (note au bas de la page 20).

Or, si h est la mesure de précision correspondante, on sait que la loi de la probabilité des erreurs peut se mettre sous la forme suivante : la probabilité $P(x)$ pour que l'erreur soit, en valeur absolue, inférieure à x est donnée par

$$P(x) = \Theta(hx),$$

Θ représentant la fonction bien connue

$$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt,$$

dont on possède les Tables.

Cherchons, par exemple, l'erreur pour laquelle la probabilité est égale à 0,999. La Table de la fonction Θ montre que

$$\Theta(2,33) = 0,999.$$

Il suffit donc de prendre

$$hx = 2,33.$$

Mais on sait d'autre part que la mesure h de la précision est liée à l'erreur moyenne quadratique e'_2 par la formule

$$he'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

On déduit donc de là que

$$x = 2,33 \times \sqrt{2}\,e'_2 = 3,29.e'_2.$$

Par suite, on peut dire qu'en admettant une tolérance égale au *triple de l'erreur moyenne quadratique* environ, on a une probabilité de 0,999 pour que le résidu ne dépasse pas cette tolérance. Ce chiffre est considéré aujourd'hui comme offrant une suffisante garantie.

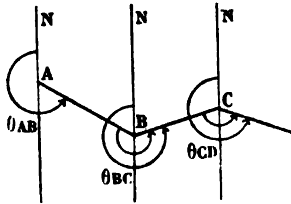
Si donc le résidu ρ ne dépasse pas le triple de l'erreur moyenne quadratique e'_2, calculée *a priori* par la formule ci-dessus, on tient l'ensemble des opérations pour bon et l'on corrige chacun des n angles mesurés de la quantité $\frac{\rho}{n}$.

Supposons, par exemple, qu'aux 16 sommets d'un polygone se refermant sur lui-même les angles aient été mesurés avec un goniomètre pour lequel $e_2 = 1'$; alors $e'_2 = 4'$, et si le résidu est inférieur à $12'$ on le divisera par 16, ce qui donnera une correction inférieure en valeur absolue à $45''$, qu'on appliquera avec son signe à chacun des 16 angles mesurés.

41. *Vérification par les azimuts.* — On peut aussi procéder à la vérification des angles d'un cheminement au moyen des azimuts mesurés soit en deux stations extrêmes, soit même en tous les sommets.

Premier cas. — Si, conformément à l'usage admis par les topographes, nous représentons par θ_{AB}, θ_{BC}, ... les azimuts des côtés AB, BC, ... aux points A, B, ... (*fig.* 57), et par la même lettre que

Fig. 57.



chaque sommet l'angle topographique qui y a été mesuré, nous voyons que

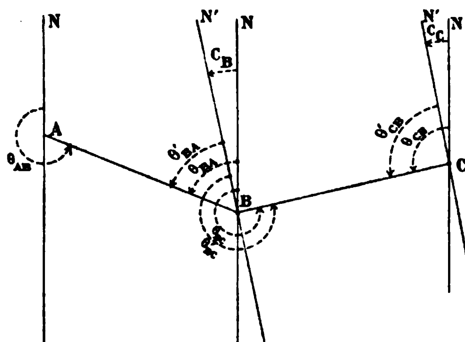
$$\theta_{BC} = \theta_{AB} + B - 200^G,$$
$$\theta_{CD} = \theta_{BC} + C - 200^G,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Supposons dès lors qu'après avoir déterminé rigoureusement le premier azimut θ_{AB} nous calculions ainsi successivement les azimuts des côtés AB, BC, ..., et que nous arrivions finalement à un côté HI dont nous ayons aussi déterminé rigoureusement l'azimut. Si, entre cet azimut et celui que donne le calcul de proche en proche qui vient d'être indiqué, se manifeste un écart ω, on divise cet écart par le nombre n des côtés de la ligne polygonale commençant au point A pour finir au point I et l'on corrige l'azimut du premier côté ou AB de $\frac{\omega}{n}$, celui du deuxième BC de $2\frac{\omega}{n}$, et ainsi de suite jusqu'à HI dont on corrige l'azimut de $n\frac{\omega}{n}$ ou ω.

Deuxième cas. — On mesure encore rigoureusement le premier et le dernier azimut; dans les stations intermédiaires on mesure l'azimut approché en corrigeant de la déclinaison magnétique l'indication donnée par le déclinatoire.

Supposons d'abord les stations extrêmes assez rapprochées pour qu'il n'y ait pas lieu de tenir compte de la convergence des méridiens [1], et soient, aux sommets successifs A, B, C, ... (*fig.* 58)

Fig. 58.



θ_{AB}, θ_{BC}, θ_{CD}, ... les azimuts *avant* vrais, θ_{BA}, θ_{CB}, ... les azimuts *arrière* vrais. Les mêmes lettres primées désigneront les azimuts apparents donnés par l'instrument. Enfin nous représenterons par C_A, C_B, C_C, ... les corrections permettant, en chaque sommet, de passer des uns aux autres.

Connaissant θ_{AB}, pour la première station, on en déduit θ_{BA} par la formule

(1) $$\theta_{BA} = \theta_{AB} - 200^G.$$

Comme d'autre part on a mesuré θ'_{BA}, on a C_B par la formule

(2) $$C_B = \theta_{BA} - \theta'_{BA}.$$

On peut alors corriger θ'_{BC} au moyen de la formule

(3) $$\theta_{BC} = \theta'_{BC} + C_B.$$

---

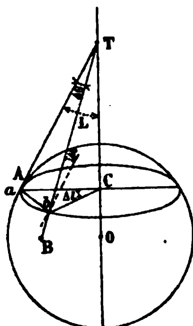
[1] Lorsqu'on rapporte ainsi les azimuts en toutes les stations à la direction du méridien de la première d'entre elles, on leur donne le nom d'*orientements* par rapport à ce méridien.

De même en tous les sommets successifs. Cette rectification de proche en proche de l'azimut porte le nom de *transmission de l'orientement*. On arrive ainsi au dernier azimut dont on compare la valeur donnée par ces transmissions successives à celle qui est obtenue rigoureusement, par une détermination directe. Si l'écart est inférieur à la tolérance admise, on le répartit, comme dans le premier cas, par fractions égales à partir du premier sommet.

42. *Convergence des méridiens.* — Si la différence en longitude Δl des points A et B est assez grande, les orientements en B, rapportés à la direction du méridien en A, doivent être corrigés de l'angle des méridiens en A et B pour donner les azimuts vrais en B.

A l'échelle du $\frac{1}{10000}$, il suffit de tenir compte de cette convergence des méridiens à partir d'une différence Δl de 10^{cG}, ce qui correspond,

Fig. 59.



sous les latitudes moyennes, à une distance d'une dizaine de kilomètres dans le sens du parallèle. A l'échelle du $\frac{1}{2000}$, et pour les échelles supérieures, il faut en tenir compte à partir de $\Delta l = 1^{cG}$, soit pour une distance dans le sens du parallèle voisine du kilomètre.

Appelant $\Delta\theta$ cette convergence des méridiens, c'est-à-dire l'angle que le méridien en B fait avec celui en A, on peut en faire comme suit le calcul approché : soient a et b les points des méridiens de A et B situés sur le parallèle moyen entre ces points. On peut prendre, pour la convergence $\Delta\theta$, l'angle que font les tangentes en a et b à ces méridiens. Or, vu la petitesse supposée de l'arc ab, on a sensiblement

$$ab = \mathrm{T}a \,.\, \Delta\theta = \mathrm{C}a \,.\, \Delta l,$$

d'où

$$\Delta\theta = \frac{Ca}{Ta} \cdot \Delta l = \sin L \,.\, \Delta l,$$

L étant la latitude du parallèle *ab*.

Le Service géographique de l'Armée a calculé les valeurs de $\Delta\theta$ pour les différentes latitudes L du territoire français en prenant $\Delta l = 10^{cG}$. Pour les mêmes latitudes M. Sanguet a donné, dans ses Tables (p. XIX), les valeurs de $\Delta\theta$ correspondant à une distance de 100^{km} comptée dans le sens du parallèle. Pour les distances plus petites, les valeurs de $\Delta\theta$ leur sont proportionnelles.

43. *Détermination du méridien.* — La méthode de vérification exposée au n° 41 suppose la détermination exacte du méridien astronomique en certains sommets. Pour les besoins courants de la Topométrie cette détermination pourra se faire par une des méthodes suivantes :

1° *Par les points trigonométriques.* — Si l'on fait en sorte que le premier et le dernier sommet, où l'on a besoin de connaître rigoureusement le méridien, soient des points du réseau trigonométrique du Service géographique de l'Armée ([1]) (ce qui, à moins de circonstances exceptionnelles, sera toujours le cas pour les levers de précision), on n'a qu'à mesurer la différence d'azimut entre la station suivante du cheminement à parcourir et l'un des points trigonométriques visibles de celui, A, d'où l'on opère. L'azimut géodésique de ce dernier point rapporté au méridien astronomique ([2]) du point A étant fourni par les Tables du Service géographique, on en déduit l'azimut vrai θ_{AB} de la station suivante B vue de A.

([1]) Les points de l'ancienne triangulation, à l'exception des clochers, ont généralement disparu; mais le Service géographique a entrepris depuis 1899, en vue de la réfection du Cadastre et de la Carte au $\frac{1}{10\,000}$, une nouvelle triangulation dont tous les sommets sont établis sur une parcelle de terrain devenue *propriété de l'État,* repérés par un cylindre en cuivre noyé dans un massif en béton de ciment, et indiqués par une plaque en fonte portant la mention « Triangulation du Service géographique de l'Armée ».

([2]) Il faut avoir bien soin de se rappeler que les *azimuts géodésiques* θ_g sont comptés à partir du Sud vers l'Ouest, alors que les *azimuts topographiques* θ_t sont comptés à partir du Nord vers l'Ouest. On a donc, à une circonférence entière près (qui s'ajoutera pour un point visé à l'Est),

$$\theta_t + \theta_g = 200^G.$$

2° *Par la Polaire* (¹). — Le mouvement en azimut de la Polaire étant minimum au moment de sa plus grande digression, on peut considérer qu'elle constitue alors un repère fixe pendant plus d'une demi-heure. Or, ainsi qu'il est dit dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, pour les latitudes boréales comprises entre 30° et 52°, l'instant de la plus grande digression *orientale* ou *occidentale* a lieu environ 5 heures 54 minutes, temps moyen, avant ou après le passage supérieur, ou bien 6 heures 4 minutes après ou avant le passage inférieur. L'*Annuaire* donne d'ailleurs les heures de ces passages pour les différentes époques de l'année, et la valeur de la plus grande digression pour les diverses latitudes comprises entre 30° et 52°. Cela permet de se servir de la Polaire en digression maximum comme on l'a fait des points trigonométriques dans le cas précédent.

3° *Par le Soleil.* — On peut, pour éviter les observations de nuit, se contenter de viser à un instant quelconque le Soleil, au moyen de la lunette d'un théodolite, en amenant l'image de l'astre à être tangente à deux fils rectangulaires du réticule (²). On applique alors à l'azimut (compté à partir d'un certain repère) et à la distance zénithale lue sur l'instrument, les corrections données par les Tables spéciales pour obtenir les coordonnées correspondantes θ_0 et z du centre du Soleil. Connaissant, en outre, la distance polaire δ du Soleil et la colatitude λ de la station où l'on se trouve, on en déduit l'azimut vrai θ du Soleil par l'une des formules (³)

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-z)\sin(s-\lambda)}{\sin z \sin\lambda}}, \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-\delta)}{\sin z \sin\lambda}},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-z)\sin(s-\lambda)}{\sin s \sin(s-\delta)}},$$

(¹) Nous rappelons pour mémoire la méthode de Francœur, consistant à viser la Polaire à l'instant de son passage dans le méridien, cet instant étant déterminé par le temps écoulé depuis l'instant où la Polaire et l'étoile ε de la Grande Ourse sont dans le même vertical. Or, ce temps écoulé, qui était environ de 13 minutes à l'époque où Francœur en fit le calcul (1830), atteint maintenant 32 minutes 30 secondes environ, ce qui est un peu long. D'autre part, c'est une mauvaise condition de viser la Polaire au moment où son mouvement en azimut est le plus rapide.

(²) Il est préférable, pour la facilité de l'observation, d'établir les contacts par les bords *qui y échappent*, c'est-à-dire : en azimut par le bord oriental, en hauteur par le bord inférieur ou supérieur, suivant qu'on est avant ou après midi.

(³) C'est la troisième de ces formules qui comporte la plus grande précision ; mais l'écart donné par l'une ou l'autre tombant au-dessous des erreurs instrumentales, on peut faire le calcul au moyen de deux quelconques d'entre elles à titre de vérification.

où

$$2s = z + \lambda + \delta.$$

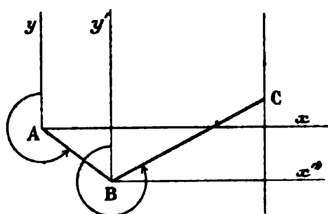
L'azimut du repère choisi par rapport au méridien est alors donné par $\theta - \theta_0$, ce qui détermine ce méridien [1].

44. *Coordonnées des sommets.* — Pour le report des résultats d'un lever, on peut toujours avoir recours au système de coordonnées auquel est liée la méthode ayant servi à exécuter ce lever (n° **36**). Mais il est préférable, dans tous les cas, d'obtenir (par un calcul qui n'offre aucune difficulté) les coordonnées rectangulaires des divers points levés rapportés à des axes bien définis qui seront, en général, dirigés suivant le parallèle et le méridien de l'un des sommets.

Prenons, par exemple, le cas d'un cheminement. Chaque sommet est d'abord rapporté à des axes rectangulaires menés, dans la direction qui a été dite, par le sommet précédent.

Prenons en A les axes Ax et Ay, en B, Bx' et By', etc. (*fig.* 60).

Fig. 60.



L'angle polaire du côté AB par rapport à Ax sera $\alpha = \theta_{AB} + 100^G$, celui de BC par rapport à Bx', $\beta = \theta_{BC} + 100^G$, etc., chacun de ces angles étant diminué de 400^G s'il dépasse une circonférence, comme ce serait justement ici le cas pour le dernier.

Cela dit, on a très simplement pour les coordonnées de B rapportées à Ax et Ay,

$$x = AB \cos\alpha, \qquad y = AB \sin\alpha,$$

pour celles de C rapportées à Bx' et By',

$$x' = BC \cos\beta, \qquad y' = BC \sin\beta,$$

. . . .

(1) *Voir*, dans les Tables de M. Sanguet, un exemple de calcul de ce genre (p. 56* à 58*).

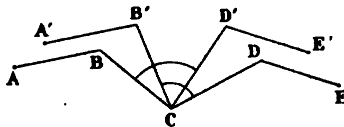
ces diverses coordonnées étant obtenues avec leurs signes. Pour avoir les coordonnées par rapport à Ax et Ay, il suffit ensuite de cumuler les coordonnées des sommets successifs, ce qui donne :

Pour B.............	x	y
Pour C...............	$x+x'$	$y+y'$
Pour D...............	$x+x'+x''$,	$y+y'+y''$
....	....	....

On obtient ainsi pour le dernier sommet des coordonnées Σx et Σy. Or, ces coordonnées ont pu être obtenues directement lorsque, par exemple, le premier et le dernier sommet appartiennent au réseau des points trigonométriques, si les opérations ont lieu en France, ou lorsqu'ils ont été déterminés par une triangulation préparatoire. Si l'on trouve ainsi les valeurs X et Y pour les coordonnées du dernier sommet, les écarts en abscisse et en ordonnée sont donnés par $\delta x = X - \Sigma x$ et $\delta y = Y - \Sigma y$. Lorsque ces écarts ne dépassent pas la tolérance admise, leur répartition entre les abscisses et ordonnées partielles est délicate. On peut, d'une manière générale, répartir δx et δy en parties proportionnelles, les unes à x, x', x'', ..., les autres à y, y', y'', ..., que l'on affecte respectivement à ces diverses abscisses ou ordonnées.

45. *Recherche des fautes.* — La vérification des angles ou des distances, telle qu'elle a été indiquée ci-dessus, accuse parfois une faute de lecture qui se manifeste, en général, par un multiple simple de l'unité employée, venant s'ajouter à un écart ε de l'ordre de

Fig. 61.

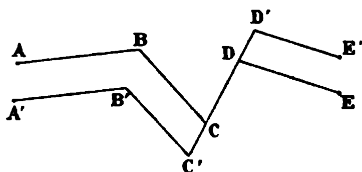


ceux qui peuvent être mis sur le compte des erreurs fortuites (par exemple $10^G + \varepsilon$, sur une somme d'angles, ou $10^m + \varepsilon$, sur une somme de distances). Si cette faute (ce qui est généralement le cas) ne provient que d'une seule des lectures intermédiaires, il n'est pas malaisé de retrouver où elle a été commise. Si, par exemple, on s'est trompé dans la lecture d'un angle au cours d'un cheminement effectué entre deux points bien déterminés sur la carte, on n'a, pour retrouver

le sommet où la faute a été commise, qu'à effectuer le tracé en partant successivement de l'un et de l'autre point extrême. Si l'on a, par exemple, commis la faute sur la lecture de l'angle C (*fig.* 61), on trouve dans un sens le tracé ABCD′E′, dans l'autre le tracé EDCB′A′, et ces deux tracés se séparent l'un de l'autre précisément au sommet C, où la lecture a été erronée. La faute est alors égale à la valeur commune des angles BCB′ et DCD′.

De même si une faute a porté sur l'évaluation de la longueur d'un des côtés, les deux tracés sont écartés l'un de l'autre par un glissement dans la direction de ce côté (*fig.* 62). Dans l'exemple ci-contre

Fig. 62.



on a, d'une part, le tracé ABCD′E′, de l'autre le tracé EDC′B′A′. La faute commise sur la longueur du côté CD est donnée par CC′ ou DD′.

46. *Application aux levers d'itinéraires.* — L'application la plus fréquente, aux travaux publics, des méthodes qui viennent d'être indiquées (et qui, d'ailleurs, sont mises en œuvre concurremment avec celles du nivellement dont il est question ci-après) concerne les levers d'itinéraires, c'est-à-dire les levers des zones, relativement étroites, à l'intérieur desquelles doit se développer le projet d'une route, d'un chemin de fer ou même d'un canal.

Le cas aujourd'hui le plus fréquent est celui d'un chemin de fer.

La première étude se fait sur les cartes déjà construites à petite échelle qui sont mises à la disposition du public. Les plus précises de ces cartes sont pour la France celle au $\frac{1}{80000}$, dite d'État-Major, et, pour certaines régions d'une importance particulière au point de vue stratégique, comme les environs de Paris, celle au $\frac{1}{20000}$. La carte au $\frac{1}{50000}$ n'est qu'une amplification photographique de celle au $\frac{1}{80000}$.

Ces deux types de carte ($\frac{1}{80000}$ et $\frac{1}{20000}$) proviennent de minutes d'échelle double ($\frac{1}{40000}$ et $\frac{1}{10000}$) dont le Service géographique de l'Armée fournit aux services intéressés des calques avec tracé des courbes

de niveau de 10^m en 10^m dans le premier cas, de 2^m,50 en 2^m,50 dans le second.

En certains cas aussi, on peut avoir recours, pour la planimétrie, aux tableaux d'assemblage du Cadastre à l'échelle du $\frac{1}{10000}$ ou du $\frac{1}{20000}$ ([1]).

Lorsque l'étude faite sur la carte, généralement complétée par une reconnaissance rapide du terrain, a permis de fixer un premier tracé répondant aux conditions multiples (techniques, économiques, stratégiques, etc.) qui interviennent dans la question ([2]), il devient nécessaire d'effectuer le lever d'une zone dont l'axe est constitué par ce tracé et dont la largeur varie, en moyenne, de 200^m à 500^m pour un chemin de fer, de 20^m à 50^m pour une route. Ce premier lever, généralement effectué à l'échelle du $\frac{1}{5000}$, sert à l'établissement de l'avant-projet, puis à sa rectification en vue notamment des conditions tenant à la compensation des déblais et remblais, dont il sera question plus loin. Lorsque le tracé définitif est arrêté, l'axe est reporté sur le terrain et l'on procède à un nouveau lever, cette fois à l'échelle du $\frac{1}{2000}$, ou même du $\frac{1}{1000}$, s'étendant à une zone un peu supérieure à celle que délimite la plus grande largeur d'emprise, et qui fournira les éléments du calcul définitif de la cubature du projet.

Les levers d'itinéraires se font d'ailleurs d'après deux méthodes générales : la *méthode des profils en long et en travers* et la *méthode tachéométrique* dont nous allons dire quelques mots :

1° *Méthode des profils en long et en travers.* On marque au moyen de balises, sur le terrain, les sommets de la ligne polygonale constituant l'axe du tracé arrêté provisoirement par l'étude sur la carte. On lève alors, par cheminement, la polygonale ainsi définie, à laquelle on rattache la zone environnante au moyen de profils en travers, espacés de 100^m dans les pays moyennement accidentés, et dirigés suivant les normales aux côtés de la polygonale. On a soin, en outre, de lever un profil suivant la bissectrice de chacun des angles de cette polygonale. Pour ce lever au $\frac{1}{5000}$, toute longueur inférieure à 1^m étant graphiquement négligeable, on se contente d'une approxi-

---

([1]) Le Service géographique de l'Armée est en train de lever une nouvelle carte à l'échelle du $\frac{1}{10000}$, dont la publication se fera au $\frac{1}{20000}$, avec courbes de niveau de 2^m,50 en 2^m,50. Cette carte est appelée à rendre les plus signalés services aux ingénieurs.

([2]) Le détail de cette étude rentre dans le programme de la partie technique du *Cours de routes*, dont est chargé M. l'Inspecteur général Debauve.

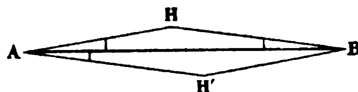
mation de $0^m,20$ ou $0^m,30$ sur les 100^m, les angles étant déterminés à $2'$ ou $3'$ (ou 5^{cG}) près, les altitudes à $0^m,1$ près.

Lorsque, grâce à ce premier lever, on a fixé le tracé définitif, on en reporte l'axe sur le terrain, cette fois avec toutes les courbes de raccordement destinées à relier les parties droites successives et l'on procède à un nouveau lever, à l'échelle du $\frac{1}{2000}$, du profil en long et des profils en travers dirigés encore normalement à l'axe en des points dont les distances à l'origine du projet s'expriment tous par des nombres ronds afin de faciliter ultérieurement les calculs de cubature. Ces profils en travers (qui, pour les chemins de fer, s'étendent en moyenne à 50^m de part et d'autre de l'axe) sont d'ailleurs définis par des points assez rapprochés pour que leur ensemble donne une idée suffisamment exacte de la surface du terrain. Leur écartement moyen peut être fixé à 5^m; on le réduit à 4^m, 3^m et même 2^m dans les terrains très accidentés; on l'étend, au contraire, jusqu'à 10^m pour ceux qui le sont à peine.

2° *Méthode tachéométrique*. — La méthode tachéométrique consiste à faire le lever de la zone intéressant le projet au moyen d'un cheminement qui n'épouse d'ailleurs pas nécessairement l'axe du tracé, et chevauche, au contraire, de part et d'autre, de façon à permettre le choix des sommets les plus commodes pour le lever par rayonnement des points avoisinants.

Grâce à cette circonstance qui rend le lever indépendant de la fixation du tracé définitif, on peut se dispenser du lever préparatoire (à l'échelle du $\frac{1}{5000}$), destiné, dans la méthode précédente, à cette fixation, et dresser, immédiatement après l'étude sur la carte, le lever au $\frac{1}{2000}$ qui servira à la fois pour l'avant-projet et le projet définitif. Le tachéomètre permet, en effet, d'étendre ce lever à une bande d'en-

Fig. 63.



viron 200^m de largeur de part et d'autre de l'axe, ce chiffre répondant sensiblement à sa portée utile.

Si d'ailleurs on ne peut pas déterminer directement au tachéomètre la longueur d'un côté AB de la ligne de cheminement (*fig.* 63), parce qu'il dépasse la portée utile de l'instrument, on vise des points

tels que H, H′, voisins du milieu de ce côté et l'on a :

$$l = AH \cos A + BH \cos B = AH' \cos A' + BH' \cos B'$$

en appelant A et B les angles à la base du triangle AHB, A′ et B′ ceux du triangle AH′B.

Quelle que soit d'ailleurs la méthode employée, on ne doit pas négliger, à titre de vérification, de relever les points déjà marqués avec précision sur la carte ou appartenant à un ensemble bien défini comme le bord rectiligne d'une voie déjà tracée. Pour les levers faits sur le territoire français, il est indispensable de les rattacher aux points trigonométriques dont le réseau a été fourni par les opérations géodésiques du Service géographique de l'Armée, et qui constituent des repères rigoureusement définis pour les opérations topométriques.

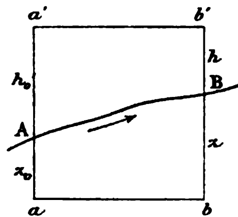
CHAPITRE III.

ALTIMÉTRIE.

I. — Instruments et méthodes.

47. *Principe fondamental.* — On suppose les deux points dont on veut apprécier la différence de niveau assez rapprochés pour qu'il n'y ait pas lieu de tenir compte de l'angle que font entre elles les verticales en ces points. Soient z_0 et z les cotes de ces points A et B (*fig.* 64) au-dessus d'un plan horizontal de comparaison. Leurs verti-

Fig. 64.



cales Aa et Bb sont coupées par un plan horizontal quelconque en des points a' et b', dont les hauteurs au-dessus de A et de B sont respectivement h_0 et h ; on a

$$z_0 + h_0 = z + h,$$

d'où

$$z - z_0 = h_0 - h.$$

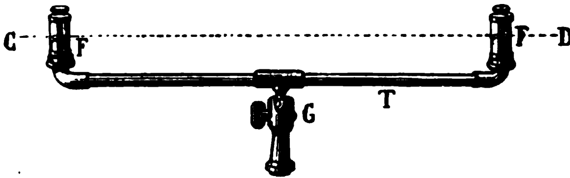
La cote du point z s'obtiendra donc en ajoutant à z_0 la quantité $h_0 - h$. Cela est absolument général, cette quantité $h_0 - h$ étant prise avec son signe. Tout revient donc à déterminer les points a' et b' dans un même plan horizontal. On se sert pour cela d'un instrument appelé *niveau*, donnant une ligne de visée horizontale que l'on dirige successivement vers A et vers B en plaçant des mires sur ces points. Le point A, si l'opérateur marche dans la direction de AB, est dit *point arrière ;* B est le *point avant.* Les lectures faites sur les

mires correspondantes sont les lectures *arrière* et *avant*. La quantité $h_0 - h$ est l'excès de la lecture arrière sur la lecture avant, et c'est cette différence, *prise avec son signe,* que l'on ajoute, dans tous les cas, à la cote du point arrière pour avoir celle du point avant.

48. *Niveaux à visée directe.* — Dans ces instruments la direction horizontale est obtenue au moyen de la propriété fondamentale, soit des vases communicants, soit du fil à plomb.

Le plus simple d'entre eux est le *niveau d'eau* (*fig.* 65), qui n'est

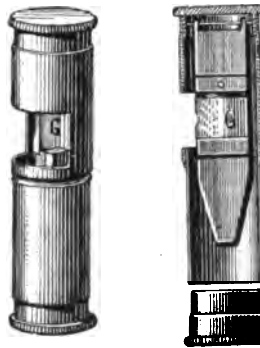
Fig. 65.



employé que lorsqu'on n'a besoin que d'une très faible précision. Le plan du niveau de l'eau dans les deux fioles F, qui communiquent par un tube T assez long, étant horizontal, on fait la visée suivant la tangente intérieure commune CD aux deux ménisques.

Comme on ne saurait accommoder la vue à la fois pour la distance de chacune des deux fioles et pour celle de la mire, la lecture sur une

Fig. 66.



mire parlante est impossible. Aussi cet instrument ne comporte-t-il l'emploi que de mires à voyants.

Le *niveau Burel* est constitué par un pendule auquel est fixé, parallèlement à son axe, un miroir rectangulaire G (*fig.* 66). L'opé-

rateur tient l'instrument dans une position à peu près verticale, de façon à voir l'image de son œil sur l'arête du miroir. La ligne qui passe par la pupille et son image est forcément horizontale, le miroir

Fig. 67.



étant vertical, et peut être prise comme ligne de visée. Mais ici encore se présente une difficulté d'accommodation, l'œil devant

Fig. 68.



regarder, d'une part, son image dans le miroir, de l'autre, le centre du voyant.

Le colonel Goulier a remédié à cet inconvénient par l'invention très ingénieuse du *niveau à collimateur :* Un petit collimateur est

fixé à un pendule, de telle sorte que, par construction, lorsque le pendule est vertical, l'axe du collimateur soit horizontal (*fig.* 67). Un fil horizontal tendu en travers du collimateur et qui se projette sur un verre dépoli est regardé au moyen d'un oculaire disposé

Fig. 69.



de telle sorte qu'il renvoie l'image de ce fil environ à 30^m en avant de l'instrument, c'est-à-dire à la distance ordinaire des visées directes. La difficulté d'accommodation n'existe donc plus, ce qui permet d'employer une mire parlante sur laquelle l'opérateur lit la hauteur où se trouve l'image du trait du collimateur. Cette lecture est guidée par des couleurs différentes qui distinguent sur la mire les mètres et les décimètres les uns des autres (*fig.* 68).

Pour une seule opération faite avec le niveau d'eau, l'erreur kilométrique moyenne est d'environ $0^m,1$; elle est un peu moindre avec le niveau Burel. Le niveau à collimateur réduit cette erreur à $0^m,06$.

Pour avoir plus de précision, il faut recourir aux instruments à lunette.

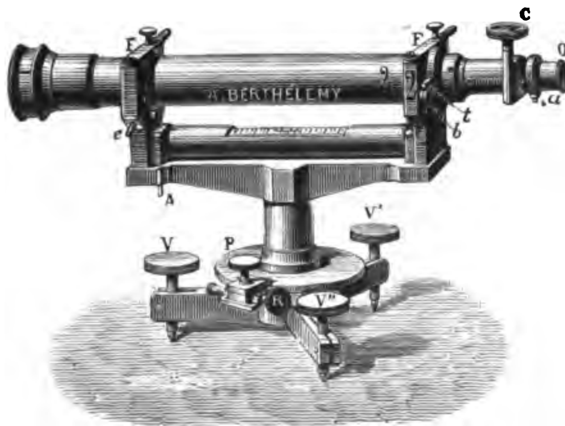
En disposant le collimateur du colonel Goulier suivant l'axe d'un pantomètre, autour duquel il est rendu mobile, et en substituant au fil unique de ce collimateur une échelle des pentes (obtenue par réduction photographique et dont l'image est grossie par la loupe), M. Daniel, conservateur des instruments à l'Ecole des Ponts et Chaussées, a constitué, sous un faible volume, un instrument dit *pantoaltimètre* (*fig.* 69), très pratique pour les levers de détail n'exigeant pas une très grande précision.

Le fil vertical servant à la visée du pantomètre est constitué par un trait marqué dans l'axe de l'échelle des pentes; celle-ci, graduée en centièmes, va de $-0{,}30$ à $+0{,}30$. Le limbe du pantomètre est gradué en degrés, et l'alidade est munie de deux verniers au $\frac{1}{10}$ donnant, par conséquent, les 6'.

L'instrument, placé sur un trépied à translation d'une bonne disposition, est muni d'une petite nivelle sphérique fixée au plateau du pantomètre, et porte à sa partie supérieure une boussole.

49. *Niveaux à lunette.* — En principe, ces instruments se composent d'un axe vertical auquel est liée une nivelle (¹), et qui repose

Fig. 70.



sur une base à trois vis calantes, et d'une lunette réglée de telle sorte

(¹) *Voir* p. 4, Note (²).

que, lorsque l'axe de rotation est vertical, l'axe optique de la lunette est horizontal.

Le plus ancien de ces instruments est le *niveau d'Egault,* dans lequel l'axe porte à sa partie supérieure une règle sur laquelle sont fixées la nivelle ainsi que deux fourches supportant la lunette. La lunette est munie d'un réticule dont le fil horizontal est dit le *fil niveleur*. Cette lunette peut être retournée bout pour bout sur ses appuis, et sens dessus dessous autour de son axe géométrique, mouvement limité exactement à une demi-circonférence par des taquets et des buttoirs.

Le *niveau Bourdaloué* (*fig.* 70) ne diffère du précédent que par des dispositions de détail, dont la principale consiste en ce que les colliers de la lunette sont prismatiques au lieu d'être circulaires.

Réglage. — Quel que soit l'instrument employé on doit le soumettre aux rectifications correspondant aux causes d'erreurs suivantes :

1° Défaut de coïncidence de l'axe optique de la lunette avec son axe de figure ;

2° Défaut de perpendicularité de l'axe de figure et de l'axe de rotation ;

3° Défaut de verticalité de l'axe de rotation.

Les erreurs correspondantes étant supposées très petites, on pourra considérer, en vertu d'un principe bien connu, que leurs effets s'ajoutent et, par suite, chercher à les éliminer individuellement, comme si les deux autres n'existaient pas.

Envisageons-les donc successivement.

1° *Défaut de coïncidence de l'axe optique et de l'axe de figure.* — Il se produit lorsque le fil horizontal ([1]) du réticule ne rencontre pas l'axe de figure de la lunette ([2]). Or c'est l'axe optique

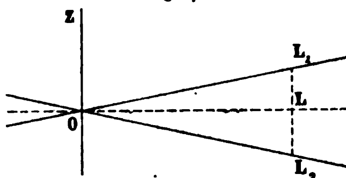
---

([1]) Ici, et dans les lignes qui suivent, nous supposons que l'on a assuré l'horizontalité effective du fil niveleur. Sans cela, il faudrait substituer au terme « fil horizontal » les mots « horizontale du point de croisement des fils du réticule ».

([2]) Théoriquement on devrait dire : Si le point de croisement des fils du réticule ne se trouve pas sur l'axe de figure. Mais, quand il s'agit d'un niveau, il suffit que le fil horizontal rencontre l'axe de figure. La position du point de croisement sur ce fil est accessoire et, de fait, les instruments de nivellement ne sont pas pourvus d'un dispositif permettant la rectification du fil vertical du réticule.

qui constitue la ligne de visée; on fait donc sur la mire la lecture L_1 au lieu de la lecture L qui devrait être faite (*fig.* 71). Si l'on retourne la lunette sens dessus dessous autour de son axe de figure en la faisant

Fig. 71.



tourner sur ses colliers jusqu'à ce que ses taquets, quittant les premiers buttoirs, viennent heurter les seconds, l'axe optique prend une position symétrique de la première par rapport à l'axe de figure et l'on fait la lecture L_2. On agit alors sur la vis qui porte le réticule de façon à corriger l'erreur de moitié. Cette opération doit amener le fil horizontal du réticule à rencontrer l'axe de figure; mais, en pratique, on admet que ce réglage n'est pas parfait, et l'on tient compte de l'erreur qui en résulte en faisant faire, pour chaque opération, à la lunette, ce demi-tour sur elle-même.

2° *Défaut de perpendicularité de l'axe de figure de la lunette et de l'axe de rotation.* — L'axe optique et l'axe de figure sont maintenant supposés dans un même plan avec le fil horizontal du réticule et c'est dans la direction de ce plan qu'on fait une lecture L_1, différente de la lecture L qu'on devrait faire par suite du défaut de perpendicularité de l'axe OL_1 et de l'axe de rotation OZ. Faisons tourner l'appareil d'une demi-circonférence autour de son pivot vertical et retournons la lunette bout pour bout. La lecture est maintenant L_2; on amène alors la ligne de visée sur le point médian entre L_1 et L_2 en donnant à l'une des fourches, au moyen d'une vis *ad hoc*, un léger mouvement de relèvement ou d'abaissement par rapport à l'autre. On admet encore dans la pratique que ce réglage n'est pas parfait, et l'on y remédie par le retournement qui vient d'être indiqué, lors de chaque opération.

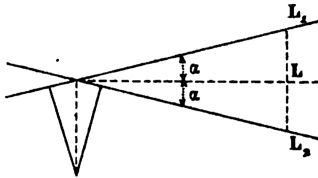
3° *Défaut de verticalité de l'axe de rotation.* — La nivelle (¹)

(¹) Nous rappelons que ce terme désigne le niveau à bulle. Son adoption est ici tout indiquee pour éviter le double emploi déjà signalé [page 4, note (²)].

étant supposée réglée ainsi qu'il a été dit précédemment, on commence par placer l'axe dans une situation aussi voisine que possible de la verticale. Mais cette verticalité ne saurait être parfaite, et il est indispensable ici de remédier à ce défaut.

Celui-ci étant censé seul exister, si l'on fait tourner la lunette d'une demi-circonférence autour de l'axe de rotation et qu'on la retourne bout pour bout, la lecture L_1 reste la même, mais la bulle de la nivelle s'est déplacée de 2α (*fig.* 72). Si l'on a eu soin de placer deux

Fig. 72.



des vis calantes sur un alignement parallèle à la ligne de visée, lorsqu'on ramènera, au moyen de ces vis, la bulle entre ses repères, l'axe de rotation prendra une position symétrique de la première par rapport à la verticale (p. 9, Rem. II) et l'on fera la lecture L_2. La lecture corrigée sera alors la moyenne $\frac{L_1 + L_2}{2}$.

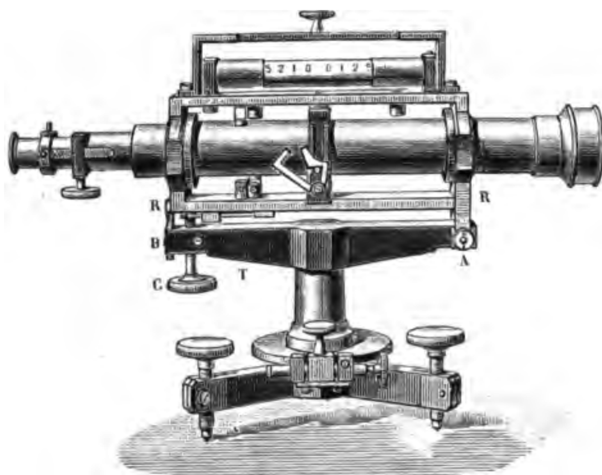
En résumé, après avoir mis l'instrument en station et assuré aussi exactement que possible la verticalité de l'axe, au moyen de la nivelle supposée réglée, on fait une première lecture, la bulle étant exactement entre ses repères, puis on fait tourner l'instrument d'une demi-circonférence autour de son axe vertical et l'on retourne la lunette à la fois sens dessus dessous et bout pour bout; on fait alors une seconde lecture après avoir remis exactement la bulle entre ses repères et l'on prend la moyenne des deux lectures.

Si l'on se sert de mires à *graduations doublées* (c'est-à-dire sur lesquelles la chiffraison en décimètres s'applique en réalité à des doubles décimètres), il suffit de faire la somme, au lieu de la moyenne, des deux lectures, ce qui introduit une certaine simplification.

50. *Niveaux à nivelle indépendante.* — Pour éviter la demi-rotation autour de l'axe vertical, complétée par le retournement bout pour bout de la lunette, on a eu l'idée de rendre la nivelle indépendante, c'est-à-dire de permettre son retournement bout pour bout

sur les appuis qui la supportent, et, en outre, de rendre possible une légère variation de la ligne des supports de la lunette par rapport au bâti de l'instrument (*fig.* 73), en la rendant solidaire d'une règle R

Fig. 73.



reliée par une de ses extrémités à ce bâti au moyen d'une articulation A et reposant par l'autre extrémité sur une vis C, dite de *fin calage*, dont l'écrou fait corps avec le bâti T.

Dans ces conditions, au lieu de retourner tout l'instrument on n'a qu'à retourner bout pour bout la nivelle et à agir sur la vis de fin calage de façon à ramener la bulle entre ses repères pour que, en vertu de la Remarque II qui termine le n° 6, l'axe de figure de la lunette prenne la position symétrique de la première par rapport à l'horizontale suivant laquelle il serait dirigé si le réglage était parfait.

Cela n'empêche d'ailleurs pas de retourner la lunette sens dessus dessous pour éliminer l'erreur provenant de la non-coïncidence de l'axe optique avec l'axe de figure.

En résumé, avec un tel niveau, la manœuvre, une fois l'instrument mis en station et son axe rendu vertical, se réduit à ceci :

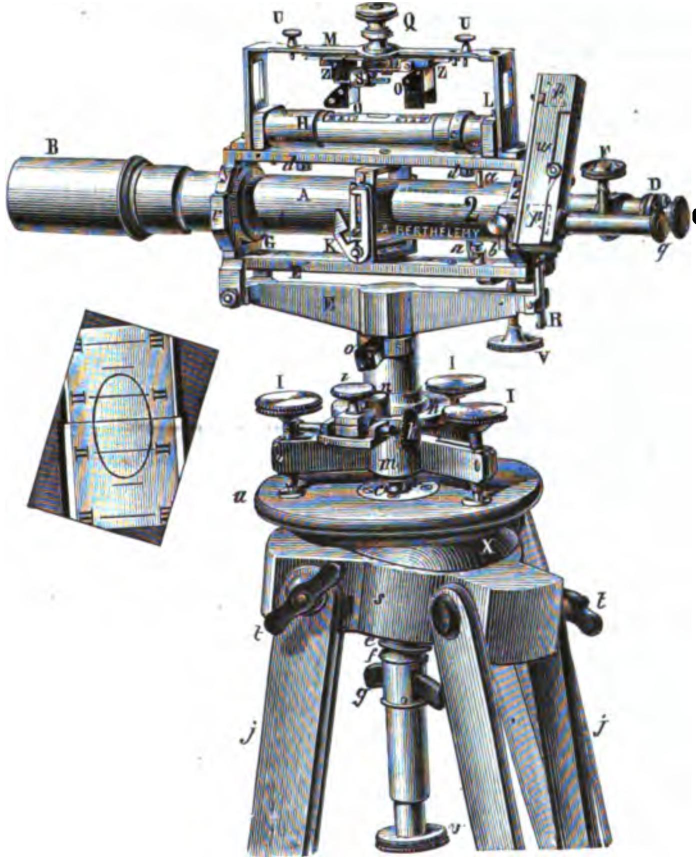
Faire une première lecture après avoir exactement mis la bulle entre ses repères; retourner la nivelle bout pour bout et la lunette sens dessus dessous et faire une seconde lecture après avoir ramené la bulle entre ses repères au moyen de la vis de fin calage.

Ici se place une remarque importante :

En agissant sur la vis de fin calage on fait varier la position de la nivelle par rapport à l'axe vertical de l'instrument et, par suite, si dans sa première position la nivelle était réglée en vue de la verticalité de cet axe, elle cessera de l'être dans la seconde.

Il faudra donc, pour mettre l'instrument en station en un autre

Fig. 74.



point, la ramener dans sa première position. A cet effet le bâti fixe d'une part, et une languette B liée à la traverse mobile R d'autre part, portent chacun un trait horizontal, et ces deux traits doivent être mis dans le prolongement l'un de l'autre lorsqu'on procède au réglage de la nivelle et que l'on veut placer l'axe de rotation verticalement. Au moment de chaque mise en station ces deux traits devront donc être

préalablement mis en coïncidence au moyen de la vis de fin calage.

Les dispositions du niveau à nivelle indépendante ont été notablement perfectionnées, en vue des opérations du *Nivellement général de la France* dont il sera question plus loin. Parmi ces perfectionnements on peut notamment citer les suivants (*fig* 74) :

La verticalité de l'axe est plus rapidement assurée grâce à l'emploi d'un trépied à calotte sphérique et d'une nivelle sphérique, qui permettent, dès que l'instrument est en station, de placer très sensiblement son axe dans la situation verticale.

Le rayon de la nivelle est porté à 50^{m}.

Mais l'innovation principale consiste en l'adjonction d'un système de prismes à réflexion totale (o, o, p, p), imaginé par M. Klein, et perfectionné par M. l'Ingénieur en chef Lallemand, qui permet de voir l'image des extrémités de la bulle de la nivelle au moyen d'un oculaire q placé à côté de celui C de la lunette. La disposition de l'image ainsi obtenue est indiquée par le croquis qui accompagne la figure générale de l'instrument.

Il convient de signaler aussi l'ingénieux emploi de taquets a, d, grâce auxquels la nivelle retournée bout pour bout ne peut reposer sur la lunette que si celle-ci est retournée elle-même sens dessus dessous, de telle sorte que cette manœuvre complémentaire ne peut pas être oubliée.

Cet instrument, d'une très grande précision, donne une erreur moyenne kilométrique inférieure de $0^{m},002$.

51. *Nivellement trigonométrique.* — On donne ce nom au nivellement effectué à l'aide des clisimètres (nº **23**). Ce procédé s'applique surtout lorsque, dans un lever par rayonnement, effectué au tachéomètre, étant en station en un point, on veut avoir par rapport à ce point les différences de niveau des points environnants. Le principe est d'ailleurs toujours celui qui a été énoncé au nº **47**.

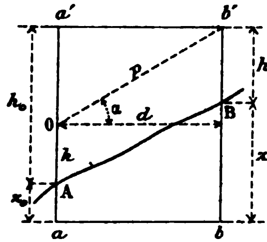
Supposons que du point O placé à l'aplomb de A (*fig.* 75) à une hauteur k au-dessus de ce point, on vise sous une pente p [1] une mire placée verticalement sur le point B dont la distance horizontale d au point A, donnée par une observation stadimétrique faite sur cette

---

[1] Au lieu d'un clisimètre donnant directement la pente p, on peut employer un éclimètre donnant soit l'angle α, soit son complément, d'où p se déduit immédiatement.

mire même, est connue. Si le plan horizontal du point b' coupe en a' la verticale du point A et si l'on pose, comme au nº 47, $Aa' = h_0$, $Bb' = h$, la différence de niveau de B par rapport à A sera

Fig. 75.



encore donnée par $h_0 - h$. Seulement ici, au lieu de lire h_0, comme h, sur une mire, on calcule cette hauteur par la formule $h_0 = pd + k$, k étant la hauteur du point O au-dessus du point A.

On pourra d'ailleurs rendre ce calcul immédiat en prenant pour p qui est quelconque une valeur s'exprimant par un chiffre rond. On pourra aussi (ainsi qu'on le fait notamment avec le tachéographe Schrader) fixer sur la mire un point de visée à une hauteur h précisément égale à k. La différence de niveau est alors simplement égale à pd. Nous avons d'ailleurs vu que, dans le tachéographe Schrader, cette différence de cote se lit immédiatement sur la règle verticale de l'instrument.

52. *Nivellement par cheminement.* — Les points à niveler sur l'axe du cheminement étant espacés d'environ 140^m à 150^m (quand la déclivité du terrain le permet), on se met en station vers le milieu de chacun des intervalles séparant ces points. Pour les mesures précises, où l'on se sert simultanément de deux mires, on se place au milieu de leur intervalle, à $0^m,50$ près, au moyen de lectures rapides faites sur ces mires à des fils stadimétriques dont, spécialement à cet effet, est munie la lunette.

Cette station à égale distance des deux points dont on compare les cotes (*fig.* 76) a l'avantage d'éliminer l'erreur provenant du défaut d'horizontalité de la ligne de visée, et tenant non seulement à ce que les rectifications signalées précédemment auraient été imparfaitement exécutées, mais encore à d'autres causes sur lesquelles on n'a aucune prise, comme l'inégalité des diamètres des colliers de la lunette.

Représentons, d'une manière générale, par R les lectures *arrière* et V les lectures *avant*. Pour ces lectures, la mire donne directement les centimètres ; les millimètres sont obtenus par l'estime.

Soient :

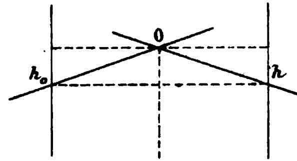
R_1, V_1 les lectures faites à la 1[re] station ;

R_2, V_2 les lectures faites à la 2[e] station ;

. . . . . . etc.

En partant d'un point de cote connue z_0, on aura successivement,

Fig. 76.



d'après la formule générale, pour les cotes des divers points nivelés :

$$z_1 = z_0 + R_1 - V_1,$$
$$z_2 = z_1 + R_2 - V_2,$$
$$z_n = z_{n-1} + R_n - V_n.$$

On tire de là : soit

$$z_n = z_0 + \Sigma_1^n (R - V),$$

soit

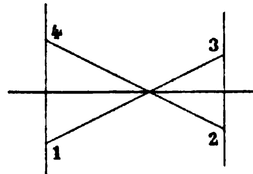
$$z_n = z_0 + \Sigma_1^n R - \Sigma_1^n V,$$

et l'on emploiera simultanément l'une et l'autre formule pour avoir un contrôle des calculs.

En réalité, ainsi qu'on vient de le voir, on fait deux lectures sur la mire arrière, deux lectures sur la mire avant.

Dans le cas où l'on dispose de deux mires, placées simultanément

Fig. 77.



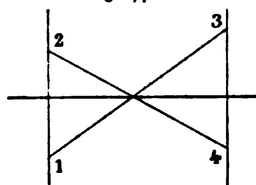
l'une sur le point arrière, l'autre sur le point avant, les lectures se font dans l'ordre suivant :

D'abord une lecture 1 sur la mire arrière (*fig.* 77), 2 et 3 sur la

mire avant, enfin 4 sur la mire arrière, la rectification de la ligne de visée étant opérée, entre les lectures 2 et 3 (par l'un des procédés donnés plus haut, suivant qu'il s'agit d'un niveau à nivelle fixe ou à nivelle indépendante).

Dans le cas où l'on ne dispose que d'une seule mire, on fait les lectures 1 et 2 sur la mire placée d'abord au point arrière, 3 et 4 sur

Fig. 77 *bis*.



la mire reportée au point avant, en opérant la rectification de la ligne de visée une première fois entre les lectures 1 et 2, une seconde entre les lectures 3 et 4 (*fig.* 77 *bis*).

Pour l'inscription des lectures, le mode ne sera pas le même suivant que l'on opérera avec des mires à graduation doublée ou à graduation simple.

Dans le premier cas, en appelant r et r' les deux lectures arrière, v et v' les deux lectures avant, on a

$$R - V = (r + r') - (v + v').$$

On peut, dès lors, disposer le carnet comme suit :

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
Numéros des piquets.	r r'	R $(r + r')$	V $(v + v')$	v v'	R − V (avec son signe)	COTES $(z + R - V)$
1						m 208,367
	1,253 1,250	2,503	1,311	0,657 0,654	+1,192	
2						209,559
	1,199 1,201	2,400	0,349	0,173 0,176	+2,051	
2						211,620
	0,462 0,459	0,921	1,422	0,713 0,709	−0,501	
4						211,109

Les numéros des piquets étant consignés dans la colonne **I**, on inscrit les lectures arrière, faites sur le terrain, dans la colonne **II**, les lectures avant dans la colonne **V**, en se servant, pour chaque station, de la bande horizontale comprise entre les numéros des piquets arrière et avant de cette station.

Pour chaque bande horizontale, les nombres de la colonne **II** donnent, par addition, ceux de la colonne **III**, et de même les nombres de la colonne **V** donnent ceux de la colonne **IV**. L'excès du nombre de la colonne **III** sur celui de la colonne **IV** s'inscrit, *avec son signe,* dans la colonne **VI**. En l'ajoutant *algébriquement* à la cote précédente de la colonne **VII**, on a la cote suivante.

Comme contrôle des calculs, on doit, en cumulant respectivement les nombres inscrits dans les colonnes **III**, **IV** et **VI**, ces derniers pris avec leur signe, vérifier que

$$\Sigma R - \Sigma V = \Sigma(R - V).$$

Dans le cas d'une graduation simple, la nécessité de prendre les moyennes des deux lectures rendrait le calcul un peu plus délicat. On le simplifie en remarquant, avec M. Lallemand, que la formule

$$R - V = \frac{r + r'}{2} - \frac{v + v'}{2}$$

peut s'écrire

$$R - V = r - v - \frac{(r - r') + (v' - v)}{2}.$$

Voici, dès lors, comment on peut disposer le carnet, en ayant soin de marquer d'avance les signes (imprimés en caractères gras) qui figurent dans les colonnes **II** et **V**. D'ailleurs, les valeurs de $r - r'$ et de $v' - v$ n'intéressant que les chiffres des millièmes, on se borne à la seule inscription de ce chiffre sans qu'il en résulte la moindre confusion.

Ici, encore, les lectures arrière et avant s'inscrivent respectivement dans les colonnes **II** et **V**, à côté des signes imprimés (ici en gras) d'avance. Pour chaque bande horizontale, la somme algébrique des nombres de la colonne **II** s'inscrit dans la colonne **III**; la colonne **V** donne de même la colonne **IV**.

Dans la colonne **VI**, au-dessous de la somme algébrique $r - v$ des deux lectures supérieures prises dans les colonnes **II** et **V** de la même bande, on inscrit la quantité $-\frac{\delta + \varepsilon}{2}$, prise avec son signe, qu'il est

très aisé de former immédiatement au moyen des chiffres pris dans les colonnes **III** et **IV**. Ce terme correctif s'inscrit d'ailleurs au dessous du *chiffre des millièmes* de $r - v$, sur lequel il porte. Le Tableau indique comment on passe de la colonne **VI** à la colonne **VII**, et de celle-ci à **VIII**.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
Numéros des piquets.	$+r$ $-r'$	$\delta = r - r'$ (avec son signe)	$\varepsilon = v' - v$ (avec son signe)	$-v$ $+v'$	$r - v$ (avec son signe) $-\frac{\delta+\varepsilon}{2}$	$R - V$ $\left(r - v - \frac{\delta+\varepsilon}{2}\right)$ (avec son signe)	COTES $(z + R - V)$
1							m 208,367
	+2,506 −2,500	+6	−6	−1,314 +1,308	+1,192 0	+1,192	
2							209,559
	+2,398 −2,402	−4	+6	−0,346 +0,352	+2,052 − 1	+2,051	
3							211,620
	+0,924 −0,918	+6	−8	−1,426 +1,418	−0,502 + 1	−0,501	
4							211,109

Comme contrôle des calculs, on doit, en cumulant respectivement les nombres inscrits dans les colonnes **II** et **V**, pris en valeur absolue, et ceux de la colonne **VII**, pris avec leur signe, vérifier que

$$\Sigma \mid r + r' \mid - \Sigma \mid v + v' \mid = 2\Sigma(R - V).$$

53. *Vérification d'un nivellement.* — Le procédé général de vérification d'un nivellement consiste à le refermer sur lui-même en revenant au point de départ, soit par le même cheminement ([1]), soit par le pourtour d'un polygone fermé. La somme algébrique $\Sigma(R - V)$, étendue à tout le circuit, doit alors être nulle.

Connaissant l'erreur moyenne quadratique kilométrique e_2 de l'instrument dont on se sert, on en déduit l'erreur moyenne $E_2 = e_2\sqrt{n}$ pour le total de la ligne parcourue si elle comprend n^{km}. Appliquant

([1]) Dans ce cas on peut comparer les deux valeurs obtenues pour une même différence partielle de niveau, à l'aller et au retour, ce qui fournit une vérification bien plus complète.

ici la tolérance admise précédemment (n° 40) pour les opérations planimétriques, on tiendra l'opération pour satisfaisante si le résidu de $\Sigma(R - V)$ ne dépasse pas $3E_2$.

Il convient d'ajouter que cette tolérance est considérée par les spécialistes français comme un peu large. Au Service du *Nivellement général*, on s'en tient à $2,5E_2$ qui paraît une limite pratiquement très satisfaisante.

Si h est la valeur résiduelle de $\Sigma(R - V)$, et si les points nivelés, y compris le point origine, sont au nombre de p, on corrige la cote du point qui suit immédiatement l'origine de $\frac{h}{p}$, celle du suivant de $\frac{2h}{p}$, et ainsi de suite, jusqu'au retour au point origine dont la cote finale, réduite de $p\frac{h}{p}$ ou h, est ramenée à la cote initiale.

En pays accidenté, on fait la répartition proportionnellement aux différences de niveau successives.

Si l'on opère dans le voisinage des repères du *Nivellement général*, qui seront définis plus loin, il faut toujours avoir soin d'y rattacher le point choisi comme origine ([1]).

Afin de n'avoir pas à y revenir, nous ajouterons que, pour rendre le contrôle plus rigoureux, lors de l'exécution du réseau fondamental du *Nivellement général* ([2]), on a eu recours à des mires dont la graduation avait été altérée de façon tout à fait irrégulière, la lecture vraie correspondant à chaque trait de division étant donnée par un graphique, conservé au Bureau central, qui traduisait les résultats de l'étalonnage. Ce n'était donc qu'après avoir été corrigées à l'aide de ce graphique que les lectures inscrites ne devaient engendrer que des discordances tombant au-dessous de la tolérance admise. Les lectures faites directement ne pouvaient conduire qu'à un résultat quelconque, dont il était même impossible de prévoir la grandeur. En privant les opérateurs sur le terrain de tout moyen de contrôle, on les mettait dans l'impossibilité matérielle de se laisser entraîner, le cas échéant, à donner le moindre coup de pouce.

([1]) Pour les Services des Ponts et Chaussées, ce rattachement a été rendu obligatoire par la Circulaire ministérielle du 21 février 1903.

([2]) Ce contrôle s'exerçait sur la discordance entre les deux différences de niveau des piquets consécutifs, fournies l'une par l'opération d'aller, l'autre par celle de retour.

54. *Tracé des courbes de niveau.* — On peut tracer les courbes de niveau qui doivent accompagner tout plan d'étude en les filant directement sur le terrain. Ayant placé le niveau en un point bien déterminé dont la cote est z_0, et mesuré la hauteur h_0 de la ligne de visée au-dessus de ce point, on voit qu'on aura des points de la courbe de niveau de cote z lorsque la mire, reposant sur ces points, donnera au fil niveleur la lecture h telle que

$$h_0 + z_0 = h + z.$$

Il sera commode, pour cette opération, d'employer une mire à voyant, ce voyant étant fixé à la hauteur h tirée de l'équation ci-dessus. On fera déplacer l'aide portant cette mire de manière à l'arrêter en des stations à peu près équidistantes, de 10^m en 10^m, par exemple, pour lesquelles l'image du centre du voyant de la mire reposant verticalement sur le sol coïncidera avec le fil niveleur du niveau, et l'on relèvera ces stations par rayonnement.

Mais si les points dont les cotes ont été mesurées, lors du lever général, ont été judicieusement choisis, de façon à faire apparaître avec une suffisante netteté les principaux accidents du terrain, notamment les lignes de faîte et de thalweg qui définissent son allure générale, on peut tracer les courbes de niveau après coup par une sorte d'interpolation à vue pratiquée sur le plan relevé.

Chacune des deux méthodes a ses partisans, et l'on ne peut guère, par des raisons théoriques, imposer plus particulièrement l'une ou l'autre ; c'est affaire personnelle à l'opérateur, peut-être aussi question d'échelle du lever.

55. *Nivellement barométrique.* — Pour se faire rapidement une idée du relief d'un pays dont on ne possède pas la carte cotée, le plus simple est de recourir à un nivellement barométrique fondé sur l'emploi de la formule de Babinet

$$Z = 16000\left[1 + \frac{2(t + t')}{1000}\right]\frac{h - h'}{h + h'},$$

qui fait connaître, en mètres, la différence de niveau Z de deux stations en fonction des pressions barométriques h et h' mesurées en ces stations, le plus souvent au moyen d'un baromètre anéroïde, et de leurs températures t et t', généralement obtenues à l'aide d'un thermomètre fronde.

Il convient que les données introduites dans la formule soient dé-

terminées au même instant. Pour cela, un observateur, resté au point origine, observe les variations horaires du baromètre et du thermomètre, tandis que l'observateur ambulant note l'heure à laquelle a lieu chacune de ses observations. Cela permet de retrouver les valeurs correspondantes de h' et t' au point origine.

Pour l'application de la formule, M. Sanguet a donné des Tables fort commodes (*loc. cit.*, p. IV et V, 13* à 18*), et M. Prévot a construit, d'après la méthode du double alignement, un nomogramme qu'on trouvera à la fin du présent Volume.

II. — Notions sur le Nivellement général de la France (N. G. F.).

56. *Organisation générale.* — La circulaire ministérielle du 17 février 1877, qui met à la charge des Ponts et Chaussées la garde et l'entretien des repères du N. G. F., rend utiles, pour les Ingénieurs de ce corps, quelques notions relatives à ce Service spécial.

Le premier nivellement général de la France, d'un développement de 15000^{km}, a été effectué de 1855 à 1863, par Bourdalouë, conducteur des Ponts et Chaussées, qui s'était rendu célèbre en opérant le nivellement préliminaire au percement de l'isthme de Suez. Alors que des opérations menées à la hâte, lors de l'expédition d'Égypte, avaient accrédité l'opinion qu'il y avait, entre la mer Rouge et la Méditerranée, une dénivellation d'environ 10^{m}, Bourdalouë avait établi que cette dénivellation n'existait pas, ce qui faisait apparaître la possibilité d'ouvrir un canal.

Les points nivelés du réseau Bourdalouë sur le territoire français ont été indiqués au moyen de repères en fonte, en forme de disques (*fig.* 78), sur lesquels est inscrite une cote qui est celle de leur plan

Fig. 78.



tangent horizontal supérieur au-dessus du niveau moyen de la mer à Marseille.

Depuis lors, suivant un programme élaboré en 1878, ce nivellement a été repris et étendu, sous la direction de M. l'Ingénieur en chef des Mines Lallemand ([1]), avec le contrôle d'une commission spéciale au sein de laquelle, pour les travaux du début, tout au moins, le colonel Goulier a joué un rôle prépondérant.

On a d'ailleurs incorporé dans ce nouveau réseau celui qui avait été nivelé par Bourdalouë, dont les opérations ont été contrôlées dans l'ensemble, sans toutefois avoir été reprises dans le détail.

Les repères principaux du nouveau réseau, placés sur les voies ferrées, ont la forme de petites consoles munies d'une pastille (*fig.* 79); c'est la cote du sommet de cette pastille qui est inscrite

Fig. 79.



sur le repère. Les repères principaux placés sur les routes sont circulaires, comme ceux de Bourdalouë, mais de plus petit diamètre et portant une pastille à la partie supérieure (*fig.* 80). Chaque repère

Fig. 80.



principal porte, en outre, une désignation matricule se référant au *Répertoire graphique* publié par le service du N. G. F.

([1]) Pour les détails, voir le Traité de *Nivellement de haute précision* de M. Ch Lallemand, Ingénieur en chef des Mines, Directeur du Service, dans l'*Encyclopédie des Travaux Publics*.

57. *Réseaux des divers ordres.* — La France est divisée en 42 polygones, dont 32 à l'intérieur du territoire et 10 contigus aux frontières continentales ou maritimes. Ce sont, en moyenne, des pentagones ayant 550^{km} de périmètre.

Ils constituent le *réseau de* 1er *ordre,* et leurs côtés suivent, en général, des lignes de chemins de fer.

Chacun de ces polygones est lui-même divisé en 5 ou 6 polygones de 250^{km} de périmètre en moyenne, constituant le *réseau de* 2e *ordre.*

De même un *réseau de* 3e *ordre* est formé par des polygones d'environ 70^{km} de périmètre, et un *réseau de* 4e *ordre* par des polygones d'environ 20^{km} de périmètre.

Le nivellement doit être complété par des courbes de niveau.

Voici un Tableau du développement des réseaux de divers ordres au 1er janvier 1904 :

				Longueurs approximatives.
				km
Réseau de 1er ordre (achevé)				11700
Réseau de 2e ordre (achevé).	Lignes nouvelles	13946	17168	17500
	Lignes Bourdalouë utilisées, rectifiées et incorporées	3222		
Voies diverses nivelées en 2e ordre pour placer des repères sur édifices stables à proximité des chemins de 2e ordre			338	
Cheminements de 3e ordre, y compris 2700^{km} de l'ancien nivellement de Bourdalouë				25800
Cheminement de 4e ordre, y compris 6300^{km} de lignes Bourdalouë et 5500^{km} de nivellements départementaux				20000
Ensemble				75000

La longueur totale du réseau de 3e ordre sera vraisemblablement de 40000^{km} environ, celle du réseau de 4e ordre, de 150000^{km}.

Un répertoire graphique a été publié pour définir les emplacements et les altitudes des repères des différents ordres.

58. *Aperçu des méthodes.* — Les opérations du 1er et du 2e ordre ont été effectuées à l'aide du niveau perfectionné dont il a été précédemment question (*fig.* 74) et des *mires à compensation* imaginées par le colonel Goulier à la suite de ses études sur l'action de la tem-

pérature et de l'humidité sur la longueur des mires. Par l'observation du glissement relatif de deux réglettes, l'une en fer, l'autre en laiton, placées à l'intérieur de la mire, on obtient la correction à apporter à la longueur du mètre moyen nominal de la mire.

Le bureau central du Service contrôle chaque jour les opérations des brigades réparties sur le territoire. Pour le réseau fondamental, ce contrôle était entouré des garanties spéciales assurées par le procédé décrit à la fin du n° 53.

Les opérateurs touchaient d'ailleurs une prime d'autant plus forte qu'ils produisaient mensuellement un plus grand nombre de kilomètres de nivellement réalisant les conditions de précision requises.

Pour les opérations du 1er ordre, le niveau était placé, à 0^m,50 près, au milieu de chaque intervalle à niveler, par le moyen des fils stadimétriques de la lunette, et l'on faisait une double visée sur chaque mire après retournement de la nivelle et de la lunette. Pour les opérations du 2e ordre, la tolérance sur la position du milieu avait été portée à 1^m, et l'on ne faisait plus qu'une seule visée sur chaque mire, sauf en deux ou trois stations le matin, au milieu de la journée et le soir, afin de déterminer le dérèglement du niveau. Les deux premiers ordres comportaient un aller et un retour sur chaque cheminement. Pour les opérations du 3e ordre, la tolérance sur la position du milieu étant portée à 1^m,50, on supprime l'opération du retour, mais on a un moyen de contrôle suffisamment efficace en faisant usage de mires spéciales graduées sur les deux faces; la graduation d'une des faces a son 0 au point de contact avec le sol, celle de l'autre, une origine quelconque.

Depuis 1900, on emploie des mires sur lesquelles la seconde face a une division systématiquement altérée. Le mètre nominal de cette seconde face a pour longueur $\frac{11}{9}$ de mètre. Si l_1 et l_2 sont les lectures faites sur les deux faces, à l'aide du fil niveleur, et si l_0 est la lecture correspondant au talon de la mire sur la seconde face, il est facile de vérifier que l'on doit avoir

$$l_1 - (l_2 - l_0) = \frac{l_1 + (l_2 - l_0)}{10},$$

ce qui constitue un contrôle des lectures.

Pour les opérations du 4e ordre, on se sert de mires à une seule

face, et il n'y a pas d'autre contrôle que celui de l'écart de fermeture, contrôle jugé suffisant en raison du peu de longueur des sections.

Voici, d'ailleurs, les valeurs des erreurs moyennes quadratiques accidentelles kilométriques pour les réseaux des différents ordres :

	mm
1er ordre........................	1,2
2e »	1,5
3e »	6
4e »	8

59. *Altitude orthométrique et cote dynamique* ([1]). — Il n'y a pas lieu, pour des nivellements de peu d'étendue, de se préoccuper de la courbure de la terre, mais, lorsque l'on opère sur un territoire aussi vaste que celui de la France, il devient impossible de n'en pas tenir compte.

La théorie admise pour le nivellement géométrique est fondée sur l'hypothèse du parallélisme des surfaces terrestres de niveau. Or, cette hypothèse n'est pas exacte, et son défaut se fait sentir si l'on cumule des différences de niveau partielles entre deux points éloignés, le long de deux cheminements suffisamment écartés l'un de l'autre. On devra donc sacrifier l'une des deux conditions relatives soit au parallélisme, soit à l'égalité de niveau.

Dans une première théorie, proposée par M. Wittstein ([2]), on maintient la condition relative au parallélisme. Ayant adopté une certaine surface de niveau origine, savoir la surface moyenne des mers, on définit l'*altitude orthométrique* de chaque point comme étant sa distance normale à cette surface. Dès lors, tous les points de même altitude sont sur une surface parallèle à cette surface origine.

Dans la seconde théorie, proposée par M. Helmert, on définit la *cote dynamique* de chaque point par le travail effectué pour élever la masse de l'unité de poids depuis la surface zéro jusqu'au point considéré. Dès lors, tous les points de même cote sont sur une surface de niveau, non parallèle, par conséquent, à la surface origine.

Pour obtenir, au lieu d'altitudes brutes, des altitudes orthométriques, il suffit, avant d'effectuer les totalisations, d'ajouter à chaque différence partielle de niveau une *correction orthométrique* ε,

---

([1]) On trouvera des renseignements détaillés sur ce sujet dans le Chapitre I de l'Ouvrage cité plus haut, de M. Lallemand.

([2]) Les Mémoires ici visés de MM. Wittstein et Helmert ont paru en 1873 dans les *Astronomische Nachrichten*, n° 1939.

donnée par

$$\varepsilon = -0{,}00528\,H \sin 2L\, dL,$$

H étant l'altitude moyenne de la station, L la latitude moyenne, dL la différence de latitude entre les deux extrémités.

Quant à l'*appoint dynamique* ζ, qu'il faut ajouter à l'altitude orthométrique pour avoir la cote dynamique, il résulte de la formule

$$\zeta = -0{,}00264\,H \cos 2L - 0{,}000000098\,H^2,$$

où H représente l'altitude orthométrique et L la latitude.

Au point de vue théorique, la définition dynamique est évidemment préférable, le travail de la pesanteur étant ce qui joue le rôle principal partout où intervient la notion de niveau. Mais, d'une part, les résultats auxquels conduit la théorie dynamique manquent un peu de précision, en raison de l'incertitude qui pèse encore sur les déterminations locales de la pesanteur et qui a forcé à calculer le terme correctif ζ en se contentant de la formule de Clairaut-Bouguer; de l'autre, la théorie orthométrique a l'avantage de maintenir la définition habituelle de l'altitude et de n'entraîner, pour les résultats bruts du nivellement, que des corrections relativement faibles et régulières d'allure.

Pour ces raisons, ce sont les altitudes orthométriques qu'on s'est décidé à faire figurer sur les repères du N. G. F. Toutefois, une colonne spéciale du Répertoire graphique fait connaître, pour le réseau du 1er ordre, l'appoint à ajouter à ces altitudes pour les convertir en cotes dynamiques.

60. *Niveau moyen de la mer*. — En France on a pris pour origine tant des altitudes orthométriques que des cotes dynamiques le niveau moyen de la mer à Marseille. Le réseau du Nivellement général permet d'y rattacher le niveau moyen de la mer en tout autre point du littoral.

Le zéro du N. G. F., dit *zéro normal,* a été déterminé à la suite de onze années (1885-1896) d'observations enregistrées au marégraphe totalisateur de Marseille, installé à l'anse du port Calvo.

Il a été trouvé 7^{cm} plus bas que celui qui avait été fixé naguère par Bourdalouë [1].

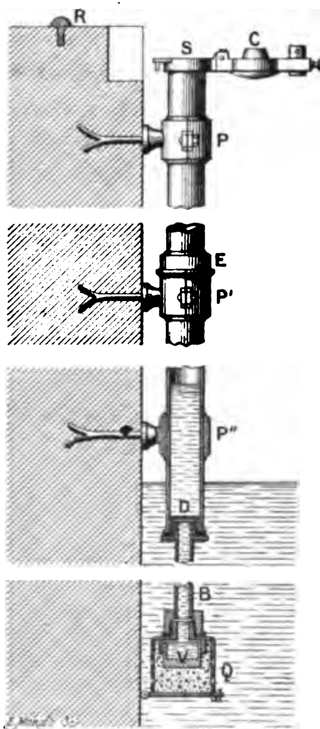
[1] Les observations poursuivies depuis lors tendraient à le placer 2^{cm} moins bas environ. Néanmoins, comme on ne saurait faire varier les cotes inscrites sur les repères, on maintient le zéro à l'emplacement fixé en 1896.

Pour déterminer en un point quelconque du littoral le niveau moyen de la mer, sans avoir à recourir à l'établissement très dispendieux d'un marégraphe, M. Lallemand a imaginé un appareil spécial, le *médimarémètre*, qui est fondé sur la propriété suivante :

Si deux vases communicants sont séparés par une paroi poreuse, les oscillations du liquide dans l'un d'eux se transmettent dans l'autre avec une phase retardée et une amplitude réduite, le niveau moyen restant le même (¹).

Suivant le degré de porosité de la paroi, on a un coefficient d'amor-

Fig. 81.

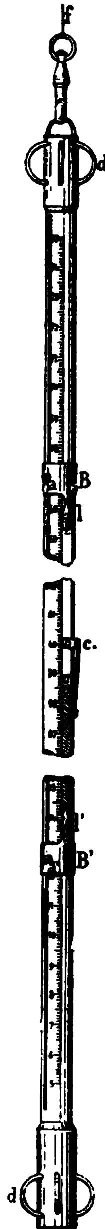


tissement aussi fort qu'on le veut. Appliquant ce principe au système formé par la mer, et la colonne d'eau placée dans un tube vertical

(¹) La théorie mathématique de ce phénomène se trouve dans le Chapitre V de l'Ouvrage cité de M. Lallemand.

communiquant avec elle à travers une paroi poreuse, on arrive à amortir complètement à l'intérieur du tube les petites oscillations (houle, clapotis) et à y réduire celles de la marée à des dénivellations insignifiantes, de façon à déterminer très aisément le niveau moyen.

Fig. 82.



L'appareil se compose d'un tube étanche S (*fig.* 81) fixé au moyen de colliers à griffes P, P′, P″, à un mur vertical en bordure d'une enceinte communiquant librement avec la mer. Ce tube est en relation, par un tuyau B, avec un plongeur Q, immergé au-dessous du niveau des plus basses mers et divisé en deux parties par la cloison poreuse V. Le compartiment inférieur est d'ailleurs rempli de sable, et son enveloppe latérale percée de trous pour l'accès de l'eau.

L'observation se fait au moyen d'une sonde graduée (*fig.* 82) sur laquelle on fixe latéralement, au moyen de bagues mobiles B, B′, munies de languettes-ressorts *l*, *l′*, une bande de papier sensibilisé au sulfate de fer et à la noix de galle. On descend cette sonde à fond dans le tube jusqu'à ce qu'elle vienne buter contre le diaphragme D (*fig.* 81) et on la remonte une ou deux secondes après. La partie mouillée du papier devient noirâtre, ce qui permet de lire facilement la cote de l'eau.

On prend la moyenne mensuelle des cotes ainsi déterminées.

Des médimarémètres de ce type ont été installés en un certain nombre de points du littoral français, sur la Manche, sur l'Océan et sur la Méditerranée. Les observations qu'on y a déjà recueillies permettent d'affirmer que, contrairement à une opinion longtemps accréditée, il n'existe pas de dénivellation entre l'Océan et la Méditerranée, les différences de niveau moyen entre ports pris dans l'une et l'autre de ces mers étant de même ordre que celles entre ports pris dans une même mer, et de signe variable. Ces différences de niveau sont même, en général, de l'ordre des erreurs possibles du nivellement.

Des opérations analogues, exécutées d'après des méthodes identiques, sont poursuivies en Algérie, par le Service géo-

graphique de l'Armée, le long des voies ferrées et des routes principales. Des médimarémètres fonctionnent à Alger, Bône et Tunis. Le zéro fondamental est le niveau moyen de la mer à Bône où le médimarémètre est installé dans d'excellentes conditions.

CHAPITRE IV.

THÉORIE GÉNÉRALE DES RACCORDEMENTS.

I. — Raccordements circulaires.

61. *Report de l'axe sur le terrain.* — Lorsque les alignements droits dont se compose l'axe d'un tracé ont été reportés sur le terrain par des jalonnements opérés dans le plan de visée d'une lunette d'alignement, il s'agit de les raccorder par des arcs de courbe, des arcs de cercle de préférence, dont les rayons dépendent de la nature de la voie à construire et de la vitesse moyenne de circulation à laquelle elle doit se prêter.

Sur les routes, l'expérience a prouvé qu'il convenait, pour une vitesse de 12^{km} à l'heure, de ne pas descendre au-dessous d'un rayon de 30^{m}, et pour une vitesse de 15^{km}, ce qui est le cas ordinaire, au-dessous d'un rayon de 50^{m}.

Sur les chemins de fer on peut, avec une vitesse de 80^{km} à 90^{km}, passer dans des courbes de 500^{m} de rayon. Ce rayon peut être abaissé à 300^{m} pour les vitesses de 60^{km} à 80^{km}, à 250^{m} pour les vitesses de 50^{km} (1).

62. *Raccordements circulaires simples.* — La solution la plus simple pour le raccordement de deux alignements droits SA et SB faisant entre eux l'angle θ consiste à tracer un arc de cercle tangent à ces deux alignements droits (*fig.* 83).

Le rayon R de ce cercle étant fixé par les convenances de la circulation qui doit se faire sur la voie considérée, on a

$$SA = SB = R \cot \frac{\theta}{2}.$$

(1) Bricka, *Cours de chemins de fer*, t. I, p. 46.

Élevant en A et B des perpendiculaires aux alignements SA et SB, on obtient le centre O du cercle de raccordement.

On peut reporter les points M de cette courbe sur le terrain par divers procédés dont nous allons rapidement passer en vue les principaux :

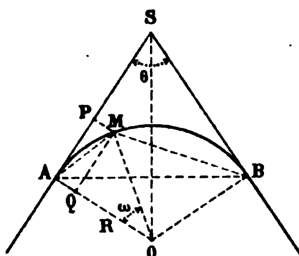
1° Le point M peut être rapporté, par abscisse et ordonnée, à l'alignement SA (*fig.* 83). On a

$$AP = MQ = R \sin \omega,$$
$$MP = OA - OQ = R(1 - \cos \omega).$$

Prenant les valeurs successives de ω croissant par échelons égaux, on obtient immédiatement, par l'emploi des Tables des sinus et cosinus naturels, qui se trouvent dans de nombreux manuels, les valeurs correspondantes de AP et MP qui permettent, à l'aide d'une chaîne et d'une équerre, le report du point M sur le terrain.

2° Les angles MAB et MBS étant égaux (*fig.* 83) comme ayant

Fig. 83.



même mesure, il suffit d'installer en A et en B des goniomètres avec lesquels on prend respectivement, à partir des alignements droits AB et SB, des angles égaux, et de faire placer un jalon à l'intersection des lignes de visée ainsi obtenues.

3° Le sommet C de l'arc AB (*fig.* 84) se trouve à la rencontre de l'alignement SO et de la droite AC, faisant avec SA l'angle

$$SAC = \frac{AOC}{2} = \frac{\pi - \theta}{4}.$$

De même la perpendiculaire élevée en C à SO rencontrant SA

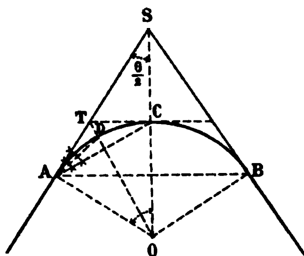
en T, on a le point D sur OT en faisant avec SA l'angle

$$\text{TAD} = \frac{\text{SAC}}{2} = \frac{\pi - \theta}{8},$$

et ainsi de suite.

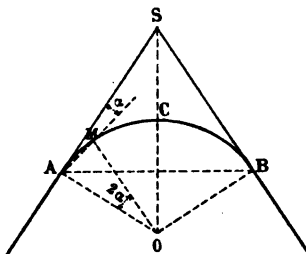
4° Plaçant un tachéomètre en A et faisant faire à sa ligne de visée,

Fig. 84.



avec l'alignement AS (*fig.* 85), un angle α (qu'on prendra, comme le

Fig. 85.



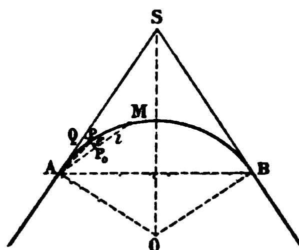
montre la figure, égal à un sous-multiple pair de AOC si l'on veut obtenir des points M divisant l'arc AC en parties égales), on aura la distance AM correspondante par la formule

$$\text{AM} = 2\text{R}\sin\alpha.$$

Il suffit donc de faire déplacer la mire sur l'alignement AM jusqu'à ce qu'on obtienne la lecture stadimétrique correspondant à cette distance. Afin d'abréger les tâtonnements, il vaut mieux, en pratique, marquer le point sur lequel se trouve la mire lorsqu'on fait une lecture voisine de celle qui serait faite en M, et reporter avec une règle graduée le point M de la petite distance correspondant à l'écart entre les deux lectures.

5° Imaginons la corde AM et sa flèche P_0P (*fig.* 86). Si de P on

Fig. 86.



abaisse sur AS la perpendiculaire PQ, on a

$$PQ = PP_0,$$

les angles PAM et PAQ étant égaux comme ayant même mesure.

Si donc la corde AM et sa flèche P_0P sont matérialisées sous forme d'une règle, ou d'une chaîne, et d'une réglette assemblées à angle droit, il suffira de diriger la règle suivant AS pour que l'extrémité de la réglette tombe sur le point P. Plaçant alors la règle symétriquement de l'autre côté du point P en amenant toujours la première extrémité de la règle en A et l'extrémité de la réglette en P, on a le point M par la seconde extrémité de la règle.

Amenant maintenant la première extrémité de la règle en P et l'extrémité de la réglette en M, on obtient, par la seconde extrémité de la règle, un nouveau point de la courbe, et ainsi de suite.

M. le Conducteur des Ponts et Chaussées Moreau a construit un appareil spécial pour l'application de ce procédé.

63. *Raccordements circulaires doubles* [1]. — Si les circonstances locales obligent à limiter les alignements droits, qu'il s'agit de raccorder, en des points A et B inégalement distants de leur point de concours S (*fig.* 87), on peut, d'une infinité de façons, raccorder ces alignements par deux arcs de cercle tangents entre eux intérieurement et dont les centres a et b se trouvent respectivement sur les perpendiculaires élevées, en A et B, à SA et à SB.

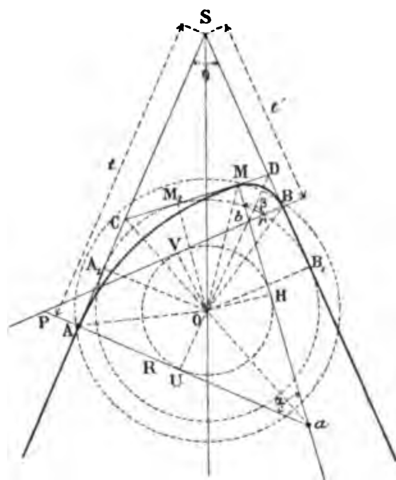
---

[1] Nous avons, pour la première fois, publié la solution reproduite ici dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3ᵉ serie, t. XVII, 1898, p. 314.

Soient M le point de raccordement des deux arcs de cercle AM et BM, et CD la tangente commune en ce point.

Prenons le point de rencontre O des bissectrices des angles C, D, S,

Fig. 87.



et traçons de ce point comme centre le cercle $A_1M_1B_1$ tangent à AC, CD et DB. Nous avons, en considérant les tangentes menées de C aux cercles AM et A_1M_1,

$$CA = CM, \qquad CA_1 = CM_1.$$

Donc

$$AA_1 = MM_1.$$

De même, en prenant le point D,

$$BB_1 = MM_1.$$

Par suite,

$$AA_1 = BB_1$$

ou

$$SA - SA_1 = SB_1 - SB,$$

et puisque $SA_1 = SB_1$,

$$SA_1 = \frac{SA + SB}{2},$$

d'où

$$AA_1 = SA - SA_1 = \frac{SA - SB}{2}.$$

On déduit d'abord de là que les points A_1 et B_1 sont fixes, par suite aussi le point O; donc *la tangente commune* CD *a pour enveloppe le cercle de centre* O *tangent à* SA *et* SB.

Maintenant l'égalité de AA_1, BB_1, MM_1 entraîne celle des triangles rectangles OAA_1, OBB_1, OMM_1, et, par conséquent, celle de OA, OB, OM. Donc *le point de contact* M *a pour lieu le cercle de centre* O *passant par les points* A *et* B.

Enfin la distance OH du point O à la ligne des centres *ab* étant égale à MM_1, l'est aussi à AA_1 et BB_1. Donc : *la ligne des centres ab a pour enveloppe le cercle de centre* O *tangent aux droites* A*a* *et* B*b*.

Si l'on se donne soit cette ligne des centres (tangente au cercle UV), soit la tangente commune CD (tangente au cercle A_1B_1), on obtient immédiatement le point de raccordement M sur le cercle AB.

Si l'on se donne le rayon et, par suite, le centre d'un des deux cercles, on n'a qu'à mener de ce centre, *a* par exemple, la tangente *a*H au cercle UV pour avoir le second centre *b*.

Une discussion facile montre, d'ailleurs, que l'on n'a un raccordement au sens pratique de ce mot, c'est-à-dire par deux arcs qui, sans rebroussement en A ou B, soient tangents entre eux intérieurement, que si le point M se trouve sur l'arc du cercle AB qui, en partant de B (point le plus rapproché de S), se trouve à l'intérieur de l'angle ASB ([1]). Si l'on prenait le point M sur l'arc du cercle AMB, qui est intérieur à l'angle ASB en partant de A, on aurait bien deux arcs de cercle tangents entre eux intérieurement, mais qui donneraient en A et B des rebroussements, circonstance inadmissible en pratique.

La différence des rayons, égale à la distance *ab* des centres, sera minimum quand le segment *ab* de la tangente au cercle UV, compris entre les droites fixes PA et PB, sera le plus court possible, ce qui a lieu lorsqu'il devient perpendiculaire à la bissectrice de l'angle APB, c'est-à-dire parallèle à la bissectrice SO de l'angle ASB, dont les

---

([1]) Si l'on se plaçait au point de vue de la Géométrie pure, on trouverait par le même procédé un second point O, situé cette fois sur la bissectrice extérieure de l'angle ASB, qui serait aussi le centre d'un cercle, passant par A et B, lieu du point de contact de deux cercles tangents entre eux et touchant respectivement SA et SB en A et B. Mais, avec ce second cercle, si le point M était pris à l'intérieur de l'angle ASB, les deux cercles variables seraient tangents *extérieurement*. Quoi qu'il en soit, géométriquement parlant, le lieu du point de contact se compose de deux cercles qui, d'ailleurs, se coupent à angle droit.

côtés sont respectivement perpendiculaires à ceux de l'angle APB. *On aura donc les centres a et b correspondant aux cercles de raccordement, dont la différence des rayons est minimum, en menant au cercle* UV *la tangente ab parallèle à* SO (*située, bien entendu, du côté du point* B).

Cette solution, fondée sur la considération du minimum de la différence des rayons, qu'on pourrait être tenté d'adopter *a priori*, offre généralement, en pratique, l'inconvénient de conduire, pour le plus petit des deux rayons, à une valeur trop faible, tombant au-dessous du minimum admissible pour les rayons des arcs entrant dans le tracé de l'axe.

Les rayons R et r des deux cercles de raccordement et leurs angles au centre α et β sont, d'ailleurs, liés à $SA = t$, $SB = t'$ et $ASB = \theta$ par trois équations qui déterminent deux de ces quantités si l'on se donne la troisième.

En effet, on a

$$\begin{aligned} R &= AU + Ua = OA_1 + Ua \\ &= SA_1 \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} + OU \cot \frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{t + t'}{2} \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} + \frac{t - t'}{2} \cot \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

De même

$$r = \frac{t + t'}{2} \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} - \frac{t - t'}{2} \cot \frac{\beta}{2}.$$

Enfin

$$\alpha + \beta = \pi - \theta.$$

Pour les rayons dont la différence est minimum

$$\alpha = \beta = \frac{\pi - \theta}{2},$$

et il vient

$$R - r = (t - t') \cot \frac{\pi - \theta}{4}.$$

On peut remarquer, ainsi que nous l'avons fait dans les *Annales des Ponts et Chaussées* (2ᵉ trim. 1903, p. 296), que, si l'on suppose l'angle ASB droit, on obtient ainsi la solution la plus générale du tracé des intrados en anse à trois centres.

II. — Raccordements à courbure progressive [1].

64. *Relation entre le devers et le rayon de courbure.* — Si, dans le cas d'une route, il n'y a pas d'inconvénient à raccorder directement un cercle avec un alignement droit [2], il n'en va pas de même pour une voie ferrée, la grandeur de la vitesse rendant non négligeable la considération de la force centrifuge.

Pour que la ligne d'appui de chaque paire de roues soit normale à la résultante du poids du véhicule et de la force centrifuge qui le sollicite dans le mouvement en courbe, il faut donner au rail extérieur un surhaussement h tel que

$$\frac{h}{e} = \frac{v^2}{gr},$$

e étant l'écartement des deux rails, v la vitesse du train, r le rayon de courbure de la courbe parcourue, g l'accélération de la pesanteur, les unités étant ici le mètre et la seconde.

Le rapport $\frac{h}{e}$ est ce qu'on appelle le *devers* de la voie (qu'il ne faut pas confondre avec le *devers* du rail). Il varie, pour une vitesse donnée (vitesse moyenne des trains circulant sur la partie de voie considérée) en raison inverse du rayon r.

Afin de faire varier progressivement ce devers depuis la valeur o qui convient à un alignement droit, jusqu'à la valeur correspondant au rayon r d'un cercle donné, il faut donc insérer entre cet alignement droit et ce cercle une courbe de raccordement dont le rayon de courbure varie progressivement depuis la valeur infinie, en son point de contact avec la droite, jusqu'à la valeur r, en son point de contact avec le cercle. En d'autres termes, il faut insérer entre le cercle et l'alignement droit une courbe de raccordement osculatrice au cercle et admettant l'alignement droit pour tangente d'inflexion.

---

(1) Cette question a fait l'objet d'un Ouvrage très savant dû à un ingénieur autrichien, M. DE LEBER : *Calcul des raccordements paraboliques dans les tracés de chemins de fer* (Baudry; 1892). Nous y renvoyons le lecteur pour les développements d'une théorie dont nous ne donnons ici que le résumé essentiel.

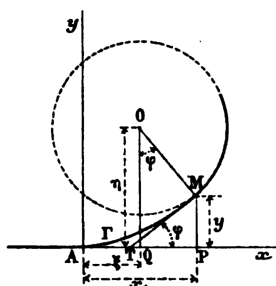
(2) Et encore le développement de l'automobilisme pourrait-il bien, à l'avenir, rendre utile l'adoption pour les routes d'une solution analogue à celle développée ici en vue des voies ferrées.

De même deux cercles de rayons différents ne devront pas être raccordés directement entre eux, mais bien par l'intermédiaire d'un arc de courbe osculateur à chacun d'eux et dont la courbure varie progressivement dans l'intervalle.

Nous verrons plus loin comment on peut faire choix d'une telle courbe de raccordement. Voyons d'abord comment, en supposant ce choix fait, on peut insérer entre les alignements droits et les cercles des arcs convenablement limités de cette courbe.

65. *Définition générale d'une courbe de raccordement* Γ. — Soit Γ une courbe présentant un point d'inflexion A (*fig.* 88) et

Fig. 88.



dont, à partir de ce point, le rayon de courbure diminue progressivement. Rapportons cette courbe à sa tangente d'inflexion Ax et à la normale correspondante Ay.

Cette courbe sera représentée par des équations telles que

$$x = X(t), \tag{1}$$

$$y = Y(t), \tag{2}$$

dans lesquelles on peut toujours supposer le paramètre t choisi de façon à s'annuler au point A, ce qui, vu le choix des coordonnées, exige que

$$X(o) = o, \qquad Y(o) = o, \qquad Y'(o) = o, \qquad Y''(o) = o.$$

On a dès lors, en appelant φ l'angle que la tangente au point (x, y) fait avec Ax,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Y'(t)}{X'(t)} \tag{3}$$

d'où l'on tire

(3 *bis*) $$\varphi = \Phi(t).$$

Quant au rayon de courbure r au point (x, y), donné par

$$r = \frac{\left[\overline{X'(t)}^2 + \overline{Y'(t)}^2\right]^{\frac{3}{2}}}{Y''(t)\,X'(t) - X''(t)\,Y'(t)},$$

nous écrirons son expression

(4) $$r = R(t).$$

Pour les coordonnées ξ et η du centre de courbure O répondant au point (x, y) de la courbe Γ, la figure donne immédiatement

(5) $$\xi = x - r \sin\varphi,$$
(6) $$\eta = y + r \cos\varphi,$$

ou, en remplaçant les quantités figurant dans les seconds membres par leurs valeurs en fonction de t, tirées de (1), (2), (3) et (4),

(5 *bis*) $$\xi = \mathfrak{X}(t),$$
(6 *bis*) $$\eta = \mathfrak{Y}(t).$$

Nous allons voir maintenant comment, ayant formé ces équations pour une courbe Γ particulière, on peut insérer des arcs de raccordement empruntés à cette courbe, entre une droite et un cercle ou entre deux cercles.

66. *Raccordement dans le cas d'un cercle.* — Dans le cas du rac-

Fig. 89.

cordement simple, tel qu'il se pratique sur les routes, on se borne, ainsi que nous l'avons vu, à tracer un cercle de rayon donné $O_0 A_0$

tangent aux deux alignements droits qu'il s'agit de relier (*fig.* 89). Partant de là, on substitue au cercle ainsi tracé celui qui sera relié à chacun des alignements droits par un arc de courbe Γ en procédant suivant l'un des modes que voici :

1° Conservant le rayon du cercle primitif, on fait glisser son centre sur la bissectrice des deux alignements droits de façon à permettre l'insertion, entre ce cercle et chaque alignement, d'un arc convenablement déterminé de la courbe Γ. On a ainsi un *raccordement à rayon conservé*. Tout étant d'ailleurs symétrique par rapport à la bissectrice, il suffit d'indiquer la construction de l'arc de courbe Γ pour l'un des alignements droits.

Soit donc O la nouvelle position dans laquelle il faut amener le centre primitif pour que le cercle de rayon donné devienne osculateur à un arc de courbe Γ admettant l'alignement SA comme tangente d'inflexion.

Le rayon r étant ici donné, l'équation (4) ci-dessus, résolue par rapport à t, fera connaître la valeur correspondante de ce paramètre. Cette valeur, portée dans les équations (1), (2), (3), (5) et (6), fournira les valeurs correspondantes de x, y, φ, ξ et η.

Ayant pris sur la droite SO_0 le point O dont l'ordonnée est η, on abaissera de ce point sur l'alignement droit SA_0 la perpendiculaire OQ, à partir du pied de laquelle on portera $QA = \xi$. Prenant ensuite $AP = x$, $PM = y$, on aura M. Enfin, la valeur de φ permettra de construire la tangente MT en M.

Pour avoir les points de l'arc AM situés entre A et M, on donnera, dans les équations (1) et (2), diverses valeurs à t depuis $t = 0$ jusqu'à la valeur correspondant au point M.

2° Laissant fixe le centre O_0 du cercle primitif, on diminue son rayon de la quantité voulue pour qu'il puisse devenir osculateur à un arc de courbe Γ admettant l'alignement SA comme tangente d'inflexion. On a alors un *raccordement à centre conservé*.

Le centre étant conservé, c'est alors η qui est donné. L'équation (6 *bis*), résolue par rapport à t, fait connaître la valeur correspondante de ce paramètre qui, portée dans les équations (1), (2), (3), (4) et (5), permet de calculer x, y, φ, r et ξ. Le problème s'achève alors comme dans le cas précédent.

Remarque. — Si, pour une certaine courbe Γ, on a construit des Tables numériques suppléant aux calculs exigés par l'une ou l'autre

des solutions qui viennent d'être exposées, on voit qu'il faudra, de toute nécessité, avoir dans un cas la Table de l'équation (4), dans l'autre, celle de l'équation (6 *bis*), pour connaître la valeur de t correspondant au point de raccordement.

Les Tables des équations (1), (2) et (3) permettront en outre une construction rapide de l'arc de raccordement demandé.

Quant au calcul de ξ, qui n'est utile que pour le seul point de raccordement M, il se fait assez aisément au moyen de la formule (5) pour qu'il soit superflu de dresser la Table de l'équation (5 *bis*).

Remarquons en outre que, dans tous les cas, la solution est acquise lorsqu'on a obtenu la valeur de t correspondant au point de raccordement M. *Cette valeur de t*, déterminée par celle de r dans le cas du rayon conservé, par celle de η dans le cas du centre conservé, *pourrait tout aussi bien être prise elle-même arbitrairement,* pourvu que la valeur correspondante de r fût pratiquement acceptable dans les conditions où l'on se trouve placé. *On peut donc toujours, lorsqu'on se sert de Tables numériques, adopter une solution dans laquelle les valeurs des éléments correspondant au point de raccordement sur le cercle sont puisés directement dans la Table et non obtenus par interpolation.*

Il suffit, par exemple, de prendre la valeur de t correspondant à la valeur r, inscrite sur la Table, qui est la plus voisine de celle que la pratique conduirait à adopter, celle-ci n'étant pas rigoureusement fixée à quelques mètres près.

67. *Raccordement dans le cas de deux cercles.* — Si le raccordement se fait par deux arcs de cercle, chacun d'eux pourra être raccordé avec l'alignement droit contigu par l'un des procédés ci-dessus, avec cette différence toutefois que ces cercles devront subir, en outre, des déplacements parallèles aux alignements droits (en entraînant, bien entendu, chacun sa courbe de raccordement avec l'alignement droit contigu) de façon à pouvoir être raccordés entre eux par un arc de courbe Γ osculateur à chacun d'eux. La distance des centres de ces cercles est, en effet, liée dans ce cas à leurs rayons. Il suffit, pour s'en rendre compte, de remarquer que les rayons r et r' de ces cercles étant connus, et, par suite, les valeurs correspondantes t et t' du paramètre par l'équation (4), les coordonnées ξ, η et ξ', η' des centres de courbure, rapportées au point et à la tangente d'inflexion de la courbe Γ *de raccordement entre les deux cercles,* le sont aussi par les équations (5 *bis*) et (6 *bis*).

Il en résulte que la distance δ de ces centres de courbure, donnée par

$$(7) \qquad \delta^2 = (\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2,$$

est parfaitement déterminée, ainsi que l'angle τ que la droite joignant ces centres fait avec la tangente d'inflexion de la courbe Γ en question, angle τ qui résulte de la formule

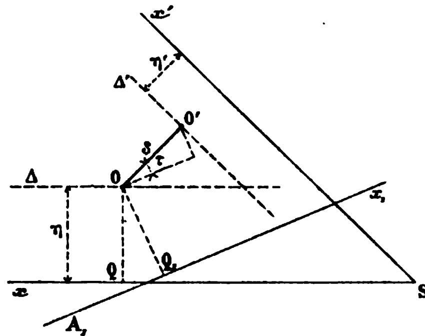
$$(8) \qquad \operatorname{tg}\tau = \frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'}.$$

Les deux solutions qui s'offrent alors sont les suivantes :

1° Si l'on se donne les rayons r et r' (1), leur connaissance entraînant, comme on l'a vu, celle de η et η', les centres O et O' devront se trouver respectivement sur les droites Δ et Δ', parallèles aux alignements droits Sx et Sx', aux distances η et η' (*fig.* 90).

Il suffira, en outre, que la distance δ des points O et O' choisis

Fig. 90.



sur Δ et Δ' ait la valeur résultant de l'équation (7), ce qui permet une infinité de choix. En général, on prendra la droite OO' parallèle à la ligne des centres des cercles de rayons r et r' qui, *sans intermédiaire,* raccorderaient les alignements Sx et Sx'.

Les centres O et O' étant alors fixés, les cercles de rayons r et r' tracés, chacun d'eux sera relié à l'alignement droit voisin ainsi qu'il a été dit plus haut pour le cas d'un seul cercle. Quant à l'arc de rac-

(1) Ces rayons seront ceux qui proviendront du tracé effectué tout d'abord au moyen de deux cercles tangents entre eux et raccordés directement chacun avec l'un des alignements droits, par application de la solution générale développée au n° 63.

cordement reliant ces deux cercles, il suffit, pour le tracer, de connaître son point d'inflexion et la tangente en ce point. Ils s'obtiennent en faisant tourner la tangente d'inflexion autour du point O jusqu'à ce qu'elle forme l'angle τ avec OO', ce qui donne la tangente $A_1 x_1$, et portant sur celle-ci la longueur $Q_1 A_1 = \xi$. On n'a plus, en se servant de $A_1 x_1$ comme axe et de A_1 comme origine, qu'à construire la courbe Γ entre les valeurs t et t' du paramètre correspondant aux deux cercles osculateurs.

2° On peut prendre pour les rayons des cercles de raccordement les valeurs données par le procédé du centre conservé appliqué à chacun d'eux pris isolément. Une fois ces rayons calculés, on achèvera la solution comme la précédente. Seulement, ici, on pourra, puisque les droites Δ et Δ' passent par les centres des cercles de raccordement primitifs, conserver l'un de ces centres.

D'une manière générale, aussi bien dans le cas d'un seul cercle que dans celui de deux, on aura recours au procédé des rayons diminués lorsque l'angle des deux alignements à raccorder sera très petit. En se plaçant dans le cas limite de deux alignements parallèles, on voit, en effet, bien évidemment, que le tracé à rayon conservé serait impossible, puisque le déplacement du centre n'éloignerait pas le cercle de ces alignements.

68. *Courbe* Γ *théorique. Emploi de la clothoïde.* — Cherchons maintenant à préciser la nature de la courbe Γ propre à l'application qui vient d'être indiquée.

Reprenons l'équation du n° **64**, qui donne le devers en fonction de la vitesse et du rayon, et, pour nous conformer à l'usage pratique, admettons que le surhaussement h du rail extérieur soit exprimé en centimètres, le rayon r en mètres, la vitesse v en kilomètres à l'heure. Si nous faisons, en outre, $e = 1^{m},50$, $g = 9^{m},8$, nous voyons que cette équation devient

$$h = 1,18 \frac{v^2}{r}.$$

Le surhaussement de l'axe de la voie étant $\frac{h}{2}$, si s est la longueur en mètres, comptée sur cet axe à partir du point de raccordement avec l'alignement droit, la pente correspondante de l'axe est donnée par

$$p = \frac{h}{200 s}.$$

L'élimination de h entre ces deux équations montre que

$$r = \frac{0,0059 . v^2}{ps} = \frac{C}{s}.$$

Il faut donc, pour que le devers varie proportionnellement au chemin parcouru (et, par suite, au temps, puisqu'ici le mouvement du train est supposé uniforme sur l'étendue de ce parcours), que le rayon de courbure varie en raison inverse de l'arc.

Avant d'aller plus loin, disons que la pratique a enseigné qu'on pouvait, suivant le type du chemin de fer auquel on avait affaire, donner à la constante C l'une des six valeurs

$$C = 24000, \quad 12000, \quad 6000, \quad 3000, \quad 1500, \quad 750,$$

la première correspondant aux lignes parcourues par des rapides, la dernière aux lignes d'intérêt local à voie étroite ([1]).

Le choix de la constante C étant fait, cherchons à déterminer la courbe pour laquelle

$$r = \frac{C}{s}.$$

Nous avons, en vertu de la définition même de r,

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{C}{s},$$

ou

$$s\, ds = C\, d\varphi,$$

d'où, en intégrant, et remarquant qu'à l'origine A (*fig.* 88), $\varphi = 0$,

$$\varphi = \frac{s^2}{2C}.$$

Il vient maintenant

$$dx = \cos\varphi . ds = \cos \frac{s^2}{2C}\, ds,$$

$$dy = \sin\varphi . ds = \sin \frac{s^2}{2C}\, ds.$$

([1]) Voici comment on peut fixer le choix : soit une ligne sur laquelle $v = 30^{km}$. Si l'on admet pour le rail extérieur une pente de 0,002, ce qui donne, pour l'axe $p = 0.001$, on a

$$C = \frac{0,0059 \times 900}{0,001} = 5310.$$

On prendra donc ici C = 6000, ce qui revient à abaisser la pente du rail extérieur à 0,0016.

Si nous posons

$$(0) \qquad s = \sqrt{\pi C}.t,$$

ces différentielles s'écrivent

$$dx = \sqrt{\pi C}\cos\frac{\pi t^2}{2}\,dt,$$

$$dy = \sqrt{\pi C}\sin\frac{\pi t^2}{2}\,dt.$$

Si donc on pose

$$\int_0^t \cos\frac{\pi t^2}{2}\,dt = \mathcal{C}(t), \qquad \int_0^t \sin\frac{\pi t^2}{2}\,dt = \mathcal{S}(t),$$

intégrales bien connues, que Fresnel a rencontrées dans la théorie de la diffraction, on a

$$(1) \qquad x = \sqrt{\pi C}.\mathcal{C}(t),$$

$$(2) \qquad y = \sqrt{\pi C}.\mathcal{S}(t).$$

Et l'on voit que la courbe Γ, définie par ces équations, n'est autre que celle qui a été introduite par Cornu dans la théorie de la diffraction (*fig.* 91) ([1]), spirale à points asymptotiques, que les géomètres appellent une *clothoïde* ([2]).

Les équations (1) et (2) ci-dessus correspondant à celles qui portent les mêmes numéros au n° 65, on aura l'équation (3 *bis*) en remplaçant, dans l'expression de φ écrite plus haut, s par sa valeur (0), ce qui donne

$$(3\,bis) \qquad \varphi = \frac{\pi t^2}{2}.$$

La même valeur de s portée dans l'équation qui a servi de point de départ donne de même

$$(4) \qquad r = \sqrt{\frac{C}{\pi}}\,\frac{1}{t}.$$

Enfin, si l'on se reporte à l'expression (6) de η (n° 65), on voit

([1]) *Journal de Physique*, 1874, p. 1 et 44.

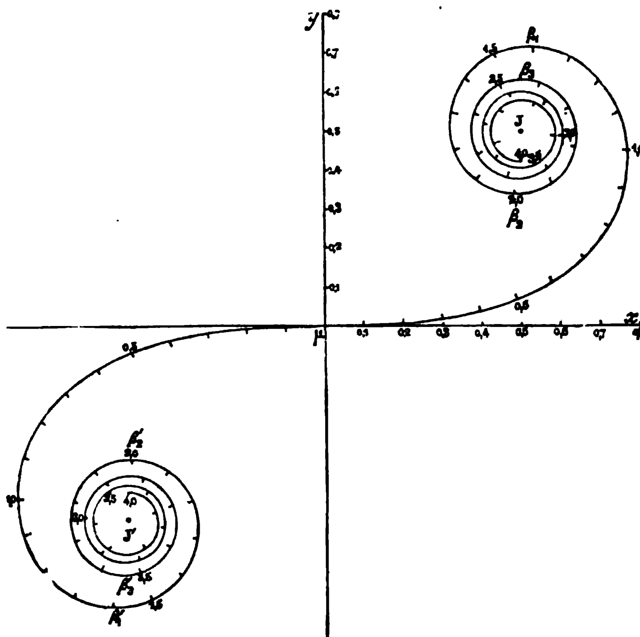
([2]) Sur l'emploi de cette courbe, on peut consulter un Mémoire de M. TOURTAY, ingénieur des Ponts et Chaussées, dans les *Annales des Ponts et Chaussées* (2e sem., 1883, p. 387).

qu'on a ici

$$\eta_1 = \sqrt{\pi C}\left[\mathcal{S}(t) + \frac{1}{\pi t}\cos\frac{\pi t^2}{2}\right]. \qquad (6\,bis)$$

Dans le cas du rayon conservé (nº **66**, 1º), t étant tiré de (4), le calcul peut être effectué sans difficulté, mais dans le cas du centre conservé (nº **66**, 2º), t étant tiré de (6 *bis*), il est de toute nécessité

Fig. 91.



de posséder une Table des valeurs de η_1 en fonction de t. Ayant pris le parti de dresser cette Table, nous avons pensé bien faire, par la même occasion, en construisant celles de toutes les formules qui interviennent dans la question [1], afin de pousser aussi loin que possible la simplification des calculs.

---

[1] C'est M. Douzon, dessinateur aux Chemins de fer de l'État, qui, sur nos indications, a bien voulu se charger de l'ingrate besogne du calcul de ces Tables. Nous tenons à lui en renouveler ici tous nos remerciments.

Ajoutons que ces Tables ont été poussées plus loin qu'il n'était strictement nécessaire pour les besoins des seuls chemins de fer afin de se pouvoir prêter à d'autres applications.

On trouvera donc à la fin du présent Chapitre :

1° Une Table des fonctions $\mathcal{S}(t)$ et $\mathcal{C}(t)$ [1];

2° Une Table, dite générale, qui fait connaître les quotients de x, y, r, η et s par $\sqrt{C}$ (ce qui fait qu'on peut s'en servir pour telle valeur particulière de C qu'on jugerait à propos de choisir), ainsi que les valeurs de φ qui, elles, sont indépendantes de C.

3° Six Tables particulières correspondant aux six valeurs pratiques de C indiquées plus haut (mais sur lesquelles on a jugé inutile de reproduire les valeurs de φ données dans tous les cas par la Table générale).

69. *Autres types de courbe* Γ. *Emploi de la lemniscate.* — Pour avoir une courbe Γ dont la courbure varie progressivement à partir de son point d'inflexion A (*fig.* 88), on peut faire varier le rayon de courbure r de cette courbe, non seulement en raison inverse de l'arc s (ce qui conduit, comme on vient de le voir, à la clothoïde), mais encore en raison inverse d'autres éléments qui varient dans le même sens que cet arc.

Prenons, par exemple, un rayon de courbure inversement proportionnel au rayon vecteur ρ compté à partir du point A,

$$r = \frac{C}{\rho},$$

la constante C étant la même que précédemment. Si nous nous servons de l'expression bien connue du rayon de courbure en fonction de la dérivée du rayon vecteur par rapport à la distance p du pôle à la tangente, nous avons

$$\frac{\rho\, d\rho}{dp} = \frac{C}{\rho}$$

ou

$$\rho^2 d\rho = C\, dp$$

(1) Le calcul de cette Table nous a conduit à rectifier certaines erreurs qui s'étaient glissées dans celle de Gilbert, classique parmi les physiciens. Pour l'interpolation, on pourra se servir des formules de différences approchées que voici :

$$\mathcal{C}(t+u) - \mathcal{C}(t) = \frac{1}{\pi t}\left[\ \sin\frac{\pi(t^2+2tu)}{2} - \sin\frac{\pi t^2}{2}\right],$$

$$\mathcal{S}(t+u) - \mathcal{S}(t) = \frac{1}{\pi t}\left[-\cos\frac{\pi(t^2+2tu)}{2} + \cos\frac{\pi t^2}{2}\right].$$

d'où, en intégrant et remarquant que ρ et p doivent être simultanément nuls,

$$\rho^3 = 3Cp.$$

Si l'on remplace p en fonction de ρ et de l'angle polaire ω, il vient

$$\rho^3 = 3C\frac{\rho^2 d\omega}{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}},$$

d'où

$$d\omega = \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{9C^2 - \rho^4}}.$$

Intégrant, en remarquant que ρ et ω sont nuls simultanément, on a

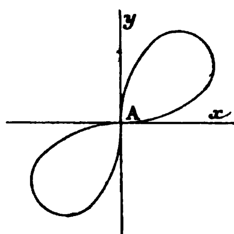
$$2\omega = \arcsin\frac{\rho^2}{3C}$$

ou

$$\rho^2 = 3C\sin 2\omega.$$

Telle est l'équation de la courbe cherchée. On reconnaît là une *lemniscate* disposée par rapport aux axes comme l'indique la figure 92.

Fig. 92.



Prenant l'angle ω pour le paramètre t du n° 65, c'est-à-dire posant

(o) $$\rho^2 = 3C\sin 2t,$$

nous aurons immédiatement pour les équations (1) et (2)

(1) $$x = \rho\cos t,$$
(2) $$y = \rho\sin t.$$

L'angle φ est donné par

$$\varphi = t + \theta,$$

θ étant l'angle de la tangente et du rayon vecteur donné par

$$\tang\theta = \frac{\rho\, dt}{d\rho} = \frac{\rho^2 dt}{\rho\, d\rho} = \frac{\rho^2}{3C\cos 2t} = \tang 2t,$$

c'est-à-dire par

$$\theta = 2t.$$

Il vient dès lors pour l'équation (3 *bis*) du n° 65

$$(3\ bis) \qquad \varphi = 3t.$$

Quant à l'équation (4) elle résulte de celle même qui nous a servi de point de départ

$$(4) \qquad r = \frac{C}{\rho} = \sqrt{\frac{C}{3 \sin 2t}}.$$

Les valeurs (2) et (4) de y et r, portées dans l'équation (6) du n° 65, montrent que l'équation (6 *bis*) peut s'écrire

$$(6\ bis) \qquad \eta = \sqrt{\frac{C}{6 \tang t}}(1 + 2\sin^2 t).$$

Pour avoir la valeur de t tirée de (4) dans le cas du rayon conservé, de (6 *bis*) dans le cas du centre conservé, M. Paul Adam, ingénieur des Ponts et Chaussées, a dressé les Tables numériques de ces deux équations pour le cas (le plus fréquent dans les applications) où $C = 12000$, Tables qui sont jointes au Mémoire dans lequel il préconise l'emploi de la lemniscate ([1]).

70. *Solution simplifiée. Emploi de la parabole cubique* ([2]). — Comme, dans sa partie utile, la courbe de raccordement Γ s'éloigne peu de l'axe des x, on peut prendre aussi le rayon de courbure inversement proportionnel à l'abscisse, au lieu du rayon vecteur. On a alors l'équation différentielle

$$\frac{C}{x} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

([1]) *Annales des Ponts et Chaussées*, 2e semestre 1895, p. 383. Voici d'ailleurs la correspondance des notations de ce Mémoire avec celles qui sont employées ici :

Notations Adam	l,	m,	R,	φ,	u,	R_0,	v,	α.
Notations présentes	x,	y,	r,	φ,	ξ,	η,	$\eta - r$,	t.

([2]) Cet emploi de la parabole cubique était proposé dès 1867 par M. Nordling, ingénieur en chef de la Compagnie d'Orléans (*Annales des Ponts et Chaussées*, 2e semestre 1867, p. 312).

Mais la tangente au point extrême de l'arc employé faisant encore avec l'axe des x un très petit angle (dans tous les cas, inférieur à 10°), le carré de sa pente est négligeable auprès de l'unité, et l'on a une solution très suffisamment approchée ([1]) en prenant

$$\frac{x}{C} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

ce qui, vu les conditions initiales, conduit à la *parabole cubique*

$$y = \frac{x^3}{6C}.$$

Si l'on prend l'abscisse x pour paramètre t, il est facile de former les équations du n° 65 qui sont ici

(1) $$x = t,$$

(2) $$y = \frac{t^3}{6C},$$

(3) $$\operatorname{tang}\varphi = \frac{t^2}{2C},$$

(4) $$r = \frac{C}{t}\left(1 + \frac{t^4}{4C^2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

(6 *bis*) $$\eta = \frac{C}{t}\left(1 + \frac{5}{12}\frac{t^4}{C^2}\right) \text{ ([2]).}$$

D'après ce qui a déjà été vu plusieurs fois, suivant qu'on adopte le raccordement à rayon ou à centre conservé, on doit tirer t de l'équation (4), ou de l'équation (6 *bis*).

M. de Leber ne s'est pas contenté de donner dans son Mémoire des développements en série très rapidement convergents pour les valeurs de t ainsi déterminées; il a encore dressé des Tables numériques

([1]) L'intégration rigoureuse de l'équation ci-dessus (à l'échange près de l'abscisse avec l'ordonnée) est donnée dans le *Cours d'Analyse professé à l'École Polytechnique*, par M. G. Humbert (t. II, p. 323). Elle conduit à la courbe dite *élastique* dont les coordonnées s'expriment en fonction elliptique d'un paramètre.

([2]) La rectification de l'arc de parabole cubique s'opère au moyen du développement en série

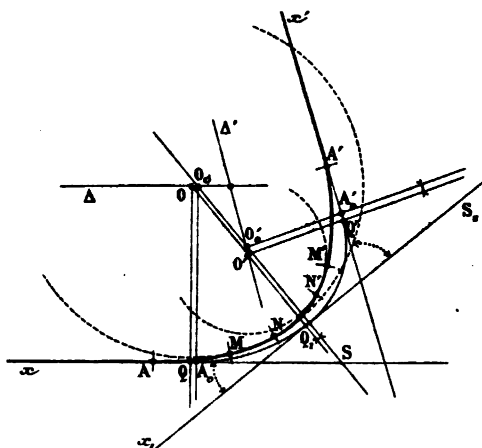
$$s = \frac{r}{C}\left(1 + \frac{2}{5}\frac{C^2}{r^4} + \frac{91}{144}\frac{C^4}{r^8} + \frac{285}{205}\frac{C^6}{r^{12}} + \frac{7475}{2176}\frac{C^8}{r^{16}} + \dots\right)$$

donné par M. de Leber. Celle de la lemniscate constitue, depuis les travaux de Serret, un exemple classique d'application des intégrales elliptiques. Quant à celle de la clothoïde, elle résulte simplement de la formule (o) du n° 68.

fournissant immédiatement la valeur de t correspondant à une valeur de r ou de η (¹).

La figure 93 empruntée au Mémoire en question donne un exemple

Fig. 93.



de raccordement à deux cercles, avec emploi de la parabole cubique.

Un premier arc AM de courbe Γ ayant Ax pour tangente d'inflexion raccorde avec osculation cet alignement droit au cercle MN de centre O. De même l'arc A′M′ de courbe Γ raccorde l'alignement droit A′x' au cercle M′N′ de centre O′. Enfin l'arc NN′ de courbe Γ (construit avec la tangente d'inflexion $S_1 x_1$, obtenue en faisant tourner Sx autour de O de l'angle τ défini par la formule (8) du n° 67) raccorde entre eux, avec osculation, les arcs MN et M′N′.

(¹) Les notations de M. de Leber sont les mêmes que celles de M. Adam (qui, d'ailleurs, les lui avait empruntées) avec cette seule différence que l'ordonnée que nous représentons ici par y, y est désignée par y_l au lieu de m.

C'est la quantité l de M. de Leber qui a été prise ci-dessus comme paramètre t.

TABLES

POUR L'EMPLOI DE LA CLOTHOÏDE DANS LES RACCORDEMENTS A COURBURE PROGRESSIVE.

I. — *Table des fonctions* $\mathcal{C}(t) = \int_0^t \cos\frac{\pi t^2}{2}\,dt$, *et* $\mathcal{S}(t) = \int_0^t \sin\frac{\pi t^2}{2}\,dt$.

t.	$\mathcal{C}(t)$.	$\mathcal{S}(t)$.
0,01	0,01000	0,00000
0,02	0,02000	0,00000
0,03	0,03000	0,00001
0,04	0,03999	0,00003
0,05	0,05000	0,00007
0,06	0,06000	0,00011
0,07	0,07000	0,00018
0,08	0,08000	0,00027
0,09	0,09000	0,00038
0,10	0,10000	0,00052
0,15	0,1500	0,0018
0,20	0,1999	0,0042
0,25	0,2498	0,0082
0,30	0,2994	0,0141
0,35	0,3487	0,0224
0,40	0,3975	0,0334
0,45	0,4455	0,0474
0,50	0,4923	0,0647
0,55	0,5377	0,0857
0,60	0,5811	0,1105
0,65	0,6220	0,1392
0,70	0,6597	0,1721
0,75	0,6935	0,2089
0,80	0,7230	0,2493
0,85	0,7469	0,2932
0,90	0,7648	0,3398
0,95	0,7760	0,3885
1,00	0,7799	0,4383

II. — *Table générale.*

t.	$\frac{x}{\sqrt{C}}$.	$\frac{y}{\sqrt{C}}$.	$\frac{r}{\sqrt{C}}$.	$\frac{\eta}{\sqrt{C}}$.	$\frac{s}{\sqrt{C}}$.	φ.
0,01	0,01772	0,00000093	56,418948	56,418949	0,01772	0. 0.32,4
0,02	0,03545	0,00000744	28,209474	28,209475	0,03545	0. 2. 9,6
0,03	0,05317	0,000025	18,80632	18,80633	0,05317	0. 4.51,6
0,04	0,07090	0,000059	14,10474	14,10475	0,07090	0. 8.38,4
0,05	0,08862	0,000116	11,28379	11,28382	0,08862	0.13.30
0,06	0,10635	0,000200	9,40316	9,40321	0,10635	0.19.26,4
0,07	0,12407	0,000318	8,05985	8,05993	0,12407	0.26.27,6
0,08	0,14180	0,000475	7,05237	7,05249	0,14180	0.34.33,6
0,09	0,15952	0,000677	6,26877	6,26894	0,15952	0.43.44,4
0,10	0,17725	0,000928	5,64189	5,64213	0,17725	0.54
0,15	0,2659	0,0032	3,7613	3,7621	0,2659	2. 1.30
0,20	0,3543	0,0074	2,8209	2,8228	0,3545	3.36
0,25	0,4428	0,0145	2,2568	2,2604	0,4431	5.37.30
0,30	0,5307	0,0250	1,8806	1,8869	0,5317	8. 6
0,35	0,6181	0,0397	1,6120	1,6219	0,6204	11. 1.30
0,40	0,7046	0,0592	1,4105	1,4254	0,7090	14.24
0,45	0,7896	0,0840	1,2538	1,2749	0,7976	18.13.30
0,50	0,8726	0,1147	1,1284	1,1572	0,8862	22.30
0,55	0,9531	0,1519	1,0258	1,0641	0,9748	27.13.30
0,60	1,0300	0,1954	0,9403	0,9898	1,0635	32.24
0,65	1,1025	0,2465	0,8680	0,9305	1,1521	38. 1.30
0,70	1,1693	0,3050	0,8060	0,8838	1,2407	44. 6
0,75	1,2292	0,3703	0,7523	0,8475	1,3293	50.37.30
0,80	1,2815	0,4419	0,7052	0,8198	1,4180	57.36
0,85	1,3238	0,5197	0,6638	0,7999	1,5066	65. 1.30
0,90	1,3556	0,6009	0,6269	0,7866	1,5952	72.54
0,95	1,3754	0,6886	0,5939	0,7792	1,6838	81.13.30
1,00	1,3823	0,7769	0,5642	0,7769	1,7725	90

III. — C = 24000.

t.	*x*.	*y*.	*r*.	η.	*s*.
0,01	2,7459	0,000144	8740,3880	8740,38815	2,7459
0,02	5,4918	0,001150	4370,1940	4370,19415	5,4918
0,03	8,2376	0,003882	2913,4628	2913,4644	8,2376
0,04	10,9835	0,009202	2185,0972	2185,1924	10,9835
0,05	13,7294	0,017972	1748,0776	1748,0828	13,7294
0,06	16,4752	0,031055	1456,7313	1456,7392	16,4752
0,07	19,2211	0,049316	1248,6268	1248,6394	19,2211
0,08	21,9670	0,073612	1092,5485	1092,5668	21,9670
0,09	24,7129	0,104812	971,1542	971,1808	24,7129
0,10	27,4587	0,143774	874,0388	874,0667	27,4587
0,15	41,1880	0,4943	582,6925	582,8231	41,1881
0,20	54,8900	1,1533	437,0194	437,3080	54,9175
0,25	68,5920	2,2516	349,6156	350,1842	68,6469
0,30	82,2116	3,8717	291,3463	292,3121	82,3762
0,35	95,7488	6,1508	249,7254	251,2468	96,1056
0,40	109,1484	9,1712	218,5097	220,8162	109,8350
0,45	122,3288	13,0154	194,2308	197,5036	123,5643
0,50	135,1792	17,7658	174,8078	179,2672	137,2937
0,55	147,6456	23,5321	158,9162	164,8430	151,0231
0,60	159,5628	30,3419	145,6731	153,3379	164,7525
0,65	170,7934	38,1951	134,4675	144,1584	178,4818
0,70	181,1452	47,2565	124,8627	136,9236	192,2112
0,75	190,4264	57,3613	116,5385	131,2926	205,9406
0,80	198,5268	68,4547	109,2549	126,9964	219,6700
0,85	205,0892	80,5091	102,8281	123,9254	233,3993
0,90	210,0044	93,3048	97,1154	121,8605	247,1287
0,95	213,0800	106,6772	92,0041	120,7129	260,8581
1,00	214,1508	120,3517	87,4039	120,3517	275,5874

IV. — C = 12000.

t.	*x*.	*y*.	*r*.	*η*.	*s*.
0,01	1,9416	0,000102	6180,3872	6180,3873	1,9416
0,02	3,8833	0,000813	3090,1936	3090,1937	3,8833
0,03	5,8249	0,002745	2060,1292	2060,1304	5,8249
0,04	7,7665	0,006506	1545,0968	1545,0986	7,7665
0,05	9,7081	0,013708	1236,0776	1236,0811	9,7081
0,06	11,6498	0,021959	1030,0645	1030,0701	11,6498
0,07	13,5914	0,034870	882,9125	882,9214	13,5914
0,08	15,5330	0,052052	772,5484	772,5614	15,5330
0,09	17,4746	0,074112	686,7097	686,7285	17,4746
0,10	19,4163	0,101664	618,0388	618,0642	19,4163
0,15	29,1244	0,3495	412,0258	412,1182	29,1244
0,20	38,8132	0,8155	309,0194	309,2234	38,8325
0,25	48,5020	1,5921	247,2155	247,6176	48,5406
0,30	58,1324	2,7377	206,0129	206,6959	58,2488
0,35	67,7044	4,3492	176,5825	177,6724	67,9569
0,40	77,1796	6,4850	154,5097	156,1406	77,6650
0,45	86,4996	9,2033	137,3420	139,6562	87,3732
0,50	95,5864	12,5626	123,6078	126,7610	97,0813
0,55	104,4012	16,6397	112,3707	116,5616	106,7895
0,60	112,8280	21,4550	103,0065	108,4262	116,4976
0,65	120,7692	27,0080	95,0829	101,9394	126,2057
0,70	128,0892	33,4154	88,2913	96,8196	135,9138
0,75	134,6520	40,5606	82,4051	92,8379	145,6220
0,80	140,3796	48,4047	77,2548	89,8000	155,3301
0,85	145,0200	56,9285	72,7104	87,6286	165,0382
0,90	148,4956	65,9765	68,6710	86,1684	174,7464
0,95	150,6704	75,4322	65,0567	85,3569	184,4545
1,00	151,4276	85,1015	61,8039	85,1015	194,1626

V. — C = 6000.

t.	x.	y.	r.	η.	s.
0,01	1,3729	0,000072	4370,1940	4370,19407	1,3729
0,02	2,7459	0,000575	2185,0970	2185,09707	2,7459
0,03	4,1188	0,001941	1456,7314	1456,7322	4,1188
0,04	5,4918	0,004601	1092,5486	1092,5496	5,4918
0,05	6,8647	0,008986	874,0388	874,0414	6,8647
0,06	8,2376	0,015528	728,3657	728,3696	8,2376
0,07	9,6106	0,024658	624,3134	624,3197	9,6106
0,08	10,9835	0,036806	546,2743	546,2834	10,9835
0,09	12,3564	0,052406	485,5771	485,5904	12,3564
0,10	13,7294	0,071887	437,0194	437,0334	13,7294
0,15	20,5940	0,2471	291,3463	291,4115	20,5941
0,20	27,4450	0,5766	218,5097	218,6540	27,4587
0,25	34,2960	1,1258	174,8078	175,0921	34,3234
0,30	41,1058	1,9358	145,6731	146,1560	41,1881
0,35	47,8744	3,0754	124,8627	125,6234	48,0528
0,40	54,5742	4,5856	109,2549	110,4081	54,9175
0,45	61,1644	6,5077	97,1154	98,7518	61,7822
0,50	67,5896	8,8829	87,4039	89,6336	68,6469
0,55	73,8228	11,7661	79,4581	82,4215	75,5115
0,60	79,7814	15,1710	72,8366	76,6689	82,3762
0,65	85,3967	19,0976	67,2338	72,0792	89,2409
0,70	90,5726	23,6283	62,4313	68,4618	96,1056
0,75	95,2132	28,6807	58,2692	65,6463	102,9703
0,80	99,2634	34,2273	54,6274	63,4982	109,8350
0,85	102,5446	40,2545	51,4140	61,9627	116,6997
0,90	105,0022	46,6524	48,5577	60,9303	123,5643
0,95	106,5400	53,3386	46,0020	60,3564	130,4290
1,00	107,0754	60,1758	43,7019	60,1758	137,2937

VI. — C = 3000.

t.	x.	y.	r.	η.	s.
0,01	0,9708	0,000051	3090,1936	3090,19365	0,9708
0,02	1,9416	0,000407	1545,0968	1545,09685	1,9416
0,03	2,9124	0,001372	1030,0646	1030,0652	2,9124
0,04	3,8833	0,003253	772,5484	772,5493	3,8833
0,05	4,8541	0,006354	618,0388	618,0406	4,8541
0,06	5,8249	0,010980	515,0323	515,0350	5,8249
0,07	6,7957	0,017435	441,4563	441,4607	6,7957
0,08	7,7665	0,026026	386,2742	386,2807	7,7665
0,09	8,7373	0,037056	343,3549	343,3643	8,7373
0,10	9,7081	0,050832	309,0194	309,0321	9,7081
0,15	14,5622	0,1747	206,0129	206,0591	14,5622
0,20	19,4066	0,4077	154,5097	154,6117	19,4163
0,25	24,2510	0,7961	123,6078	123,8088	24,2703
0,30	29,0662	1,3688	103,0065	103,3479	29,1244
0,35	33,8522	2,1746	88,2913	88,8362	33,9785
0,40	38,5898	3,2425	77,2548	78,0703	38,8325
0,45	43,2498	4,6017	68,6710	69,8281	43,6866
0,50	47,7932	6,2813	61,8039	63,3805	48,5407
0,55	52,2006	8,3199	56,1853	58,2808	53,3947
0,60	56,4140	10,7275	51,5032	54,2131	58,2488
0,65	60,3846	13,5040	47,5414	50,9697	63,1029
0,70	64,0446	16,7077	44,1456	48,4098	67,9569
0,75	67,3260	20,2803	41,2026	46,4190	72,8110
0,80	70,1898	24,2024	38,6274	44,9000	77,6651
0,85	72,5100	28,4643	36,3552	43,8143	82,5191
0,90	74,2478	32,9882	34,3355	43,0842	87,3732
0,95	75,3352	37,7161	32,5284	42,6784	92,2273
1,00	75,7138	42,5507	30,9019	42,5507	97,0813

VII. — $C = 1500$.

t.	x.	y.	r.	η.	s.
0,01	0,6865	0,000036	2185,0970	2185,09704	0,6865
0,02	1,3729	0,000288	1092,5485	1092,54854	1,3729
0,03	2,0594	0,000970	728,3657	728,3661	2,0594
0,04	2,7459	0,002300	546,2743	546,2748	2,7459
0,05	3,4323	0,004493	437,0194	437,0207	3,4323
0,06	4,1188	0,007764	364,1828	364,1848	4,1188
0,07	4,8053	0,012329	312,1567	312,1599	4,8053
0,08	5,4917	0,018403	273,1372	273,1417	5,4917
0,09	6,1782	0,026203	242,7886	242,7952	6,1782
0,10	6,8647	0,035943	218,5097	218,5167	6,8647
0,15	10,2970	0,1236	145,6731	145,7058	10,2970
0,20	13,7225	0,2883	109,2549	109,3270	13,7294
0,25	17,1480	0,5629	87,4039	87,5460	17,1617
0,30	20,5529	0,9679	72,8366	73,0780	20,5941
0,35	23,9372	1,5377	62,4313	62,8167	24,0264
0,40	27,2871	2,2928	54,6274	55,2040	27,4588
0,45	30,5822	3,2539	48,5577	49,3759	30,8911
0,50	33,7948	4,4415	43,7019	44,8168	34,3234
0,55	36,9114	5,8830	39,7290	41,2108	37,7558
0,60	39,8907	7,5855	36,4183	38,3345	41,1881
0,65	42,6984	9,5488	33,6169	36,0396	44,6205
0,70	45,2863	11,8141	31,2157	34,2309	48,0528
0,75	47,6066	14,3403	29,1346	32,8232	51,4852
0,80	49,6317	17,1137	27,3137	31,7491	54,9175
0,85	51,2723	20,1273	25,7070	30,9814	58,3498
0,90	52,5011	23,3262	24,2789	30,4651	61,7822
0,95	53 2700	26,6693	23,0010	30,1782	65,2145
1,00	53,5377	30,0879	21,8510	30,0879	68,6469

VIII. — C = 750.

t.	*x.*	*y.*	*r.*	*η.*	*s.*
0,01	0,4854	0,000025	1545,0968	1545,09683	0,4854
0,02	0,9708	0,000203	772,5484	772,54843	0,9708
0,03	1,4562	0,000686	515,0323	515,0326	1,4562
0,04	1,9416	0,001627	386,2742	386,2746	1,9416
0,05	2,4270	0,003177	309,0194	309,0203	2,4270
0,06	2,9124	0,005490	257,5162	257,5175	2,9124
0,07	3,3978	0,008718	220,7281	220,7304	3,3978
0,08	3,8833	0,013013	193,1371	193,1404	3,8833
0,09	4,3687	0,018528	171,6774	171,6821	4,3687
0,10	4,8541	0,025416	154,5097	154,5161	4,8541
0,15	7,2811	0,0874	103,0065	103,0296	7,2811
0,20	9,7033	0,2039	77,2548	77,3059	9,7081
0,25	12,1255	0,3980	61,8039	61,9044	12,1352
0,30	14,5331	0,6844	51,5032	51,6740	14,5622
0,35	16,9261	1,0873	44,1456	44,4181	16,9892
0,40	19,2949	1,6213	38,6274	39,0351	19,4163
0,45	21,6249	2,3008	34,3355	34,9140	21,8433
0,50	23,8966	3,1407	30,9019	31,6903	24,2703
0,55	26,1003	4,1599	28,0927	29,1404	26,6974
0,60	28,2070	5,3637	25,7516	27,1066	29,1244
0,65	30.1923	6,7520	23,7702	25,4849	31,5514
0,70	32,0223	8,3538	22,0728	24,2049	33,9785
0,75	33,6630	10,1401	20,6013	23,2095	36,4055
0,80	35,0949	12,1012	19,3137	22,4500	38,8325
0,85	36,2550	14,2321	18,1776	21,9071	41,2596
0,90	37,1239	16,4941	17,1677	21,5421	43,6866
0,95	37,6676	18,8580	16,2642	21,3392	46,1136
1,00	37,8569	21,2754	15,4510	21,2754	48,5407

SECONDE PARTIE.

CUBATURE DES TERRASSES.

CHAPITRE V.

CUBATURE PROPREMENT DITE.

I. — Évaluation des volumes et surfaces des terrasses.

71. *Définition d'une terrasse.* — L'axe d'une route, ou d'une voie ferrée, est complètement défini par le projet de cette voie qui fait connaître la projection horizontale de cet axe ainsi que son profil en long.

En chaque point de cet axe, la largeur de la plateforme (sur laquelle doit être établie la chaussée, s'il s'agit d'une route, la voie proprement dite, s'il s'agit d'un chemin de fer) est définie par une ligne AB horizontale de largeur connue, normale à l'axe, sur lequel doit se trouver son milieu (*fig.* 94).

Dans le *plan vertical* mené par AB, on donne enfin les lignes de talus qui limitent latéralement soit le remblai, soit le déblai, le profil comprenant, en outre, dans ce second cas, la section d'un fossé dont la largeur s'ajoute à celle de la plateforme.

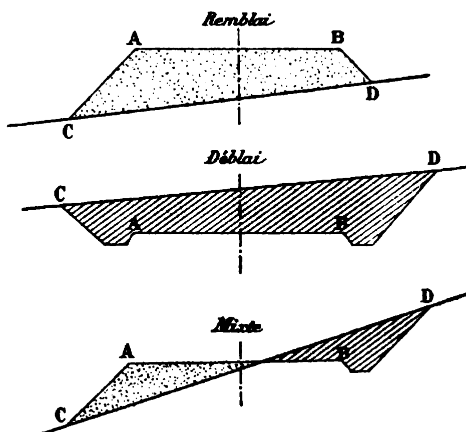
Suivant la disposition de la ligne du terrain naturel par rapport à la ligne de la plateforme on a l'un ou l'autre des types représentés sur la figure 94, les deux premiers étant dits ordinaires et le troisième mixte.

Le volume engendré par le profil en travers ainsi défini, lorsqu'on

se déplace le long de l'axe de la voie considérée, constitue ce qu'on appelle une *terrasse*.

La projection horizontale de la surface engendrée par la ligne CD du terrain naturel est dite la *surface d'emprise*.

Fig. 94.

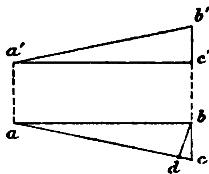


Les surfaces engendrées par les lignes de talus sont les *surfaces de talus*.

Le premier objet de la Cubature des terrasses consiste dans l'évaluation : 1° du volume des terrasses soit en remblai, soit en déblai, qui se rencontrent sur toute la longueur de la voie à construire, 2° des surfaces d'emprise et de talus.

Remarque. — On donne une valeur constante aux pentes des lignes de talus de remblai ou de déblai dans les divers profils. Cette pente est égale à

Fig. 95.



celle du remblai ou du déblai lui-même, si l'axe de la voie est horizontal. Il en diffère un peu si l'axe est incliné.

Il est facile de calculer la différence. Faisons une projection verticale sur le plan qui contient l'arête (ab, $a'b'$) de la plateforme (*fig.* 95). La ligne de

talus du profil en travers, en (b, b'), se projette suivant $(bc, b'c')$, ac étant la trace du remblai sur le plan horizontal passant par (a, a').

La pente de la ligne de talus est donnée par

$$p = \frac{b'c}{bc},$$

celle du remblai lui-même, par

$$P = \frac{b'c'}{bd},$$

bd étant la hauteur du triangle rectangle abc.

Or, dans ce triangle rectangle, on a

$$\frac{1}{\overline{bd}^2} = \frac{1}{\overline{ab}^2} + \frac{1}{\overline{bc}^2}.$$

Si donc p' est la pente de l'arête $(ab, a'b')$, il vient

$$P^2 = p'^2 + p^2,$$

ou

$$P^2 - p^2 = p'^2.$$

Comme p' est toujours très petit, on peut, sans erreur sensible, écrire

$$P - p = \frac{p'^2}{2p}.$$

Prenons, pour fixer les idées, $p' = 0{,}02$, $p = 1$. Il vient alors

$$P - p = 0{,}0002.$$

Un écart de 0,0002 par rapport à l'unité est pratiquement négligeable. Aussi peut-on sans inconvénient confondre, comme on est dans l'habitude de le faire, la pente des lignes de talus de tous les profils en travers avec la pente même du remblai ou du déblai correspondant.

72. *Volume d'une terrasse.* — Admettons d'abord, pour simplifier le langage, qu'il s'agisse d'une terrasse toute en remblai. Si nous appelons R la surface du profil en travers, l la distance horizontale de ce profil à l'origine, comptée parallèlement à la projection de l'axe, *que nous supposons rectiligne*, l'élément de volume de terrasse, correspondant à ce profil, sera donné par

$$dV = R\,dl,$$

et le volume total s'obtiendra au moyen de l'intégrale

$$V = \int R\,dl,$$

étendue à toute la longueur de la terrasse. Or, la surface du terrain n'étant pas définie géométriquement, il n'est pas possible d'exprimer R en fonction de l, ni, par suite, de calculer rigoureusement l'intégrale précédente. Pour en avoir une expression approchée, imaginons que, normalement à la projection horizontale de l'axe, nous portions, en chacun de ses points, une ordonnée égale à la valeur correspondante de R. L'extrémité de cette ordonnée décrira une ligne (R), et l'on voit que le volume V aura même expression que l'aire limitée par cette ligne (R) avec l'axe et les deux ordonnées extrêmes.

Or, si l'on ne peut obtenir une suite *continue* d'ordonnées R, on peut, tout au moins, évaluer ces ordonnées pour une série de profils suffisamment rapprochés pour que le polygone défini par leurs extrémités diffère peu de la ligne (R) dans laquelle il se trouve inscrit.

D'ailleurs, l'aire de ce polygone s'exprime, d'une manière générale, par

$$V = \sum \frac{(R_{n-1} + R_n)\, l_{n-1}}{2},$$

l_{n-1} étant la distance des ordonnées R_{n-1} et R_n; telle sera donc aussi l'expression approchée du volume cherché.

Désignant par les indices R et D les volumes respectifs du remblai et du déblai, on aura par suite

$$V_R = \sum \frac{(R_{n-1} + R_n)\, l_{n-1}}{2},$$

$$V_D = \sum \frac{(D_{n-1} + D_n)\, l_{n-1}}{2},$$

les signes Σ s'étendant à toute la longueur du tracé. Ces expressions peuvent tout aussi bien s'écrire

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} V_R &= \sum R_n \frac{l_{n-1} + l_n}{2}, \\ V_D &= \sum D_n \frac{l_{n-1} + l_n}{2}. \end{aligned} \right.$$

La longueur $\frac{l_{n-1} + l_n}{2}$ est dite la *longueur applicable au profil d'indice n*. En pratique, on prend, autant que faire se peut, les distances l_n égales entre elles et à un nombre rond, 100^m par exemple, parce qu'alors $\frac{l_{n-1} + l_n}{2} = 100^m$, et les formules prennent la forme

très simplifiée

$$V_R = 100 \sum R_n, \quad V_D = 100 \sum D_n.$$

En tout cas, si des circonstances particulières obligent à donner à certains intervalles l_n une longueur différente de celle qui est admise dans l'ensemble, on arrête toujours cette longueur à une valeur ronde (50^m, 60^m, 70^m, ...) de façon à réduire la multiplication par l'aire du profil à une opération mentale immédiate.

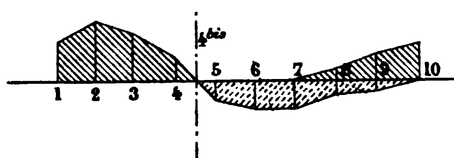
Il n'y a, dans ce qui précède, qu'à remplacer les surfaces de remblai ou de déblai par les largeurs d'emprise E_n ou les longueurs de talus T_n pour avoir les expressions des surfaces totales d'emprise ou de talus

$$(2) \qquad S_e = \sum E_n \frac{l_{n-1} + l_n}{2},$$

$$(3) \qquad S_t = \sum T_n \frac{l_{n-1} + l_n}{2}.$$

73. *Figuration géométrique. Points de passage.* — Effectuons la construction qui vient de nous servir à obtenir l'expression des volumes de remblai et de déblai, en mettant en évidence à la fois, dans chaque profil, et le remblai et le déblai. Pour cela, nous conviendrons de porter *au-dessus* de l'axe les ordonnées représentant des surfaces de *déblai*, *au-dessous* celles représentant des surfaces de *remblai* (*fig.* 96), de façon que les aires figurant le remblai (indiqué

Fig. 96.



par un pointillé) et le déblai (indiqué par des hachures) soient disposées par rapport à l'axe comme les terrasses correspondantes par rapport à la plateforme.

Dans l'intervalle des profils ordinaires de même nom, comme entre 1 et 4 où ils sont tous en déblai, ou entre 5 et 7 où ils sont tous en remblai, il n'y a pas de difficulté : on joint par une ligne polygonale les extrémités de toutes les ordonnées construites. Point de difficulté non plus pour les séries de profils mixtes, comme entre 7 et 10 : on

joint par une ligne polygonale d'une part les extrémités des ordonnées représentant les surfaces de remblai, de l'autre celles des ordonnées représentant les surfaces de déblai.

Mais, entre un profil tout en déblai et un profil tout en remblai, comme c'est le cas pour 4 et 5, il faut nécessairement intercaler un profil 4 *bis* où a lieu le passage du déblai au remblai. Ce *point de passage* s'obtient sur l'axe en tirant une droite entre les extrémités des deux ordonnées de sens contraire contiguës.

Il divise la distance l_4 des points 4 et 5 dans le rapport de D_4 à R_5, et l'on a, pour les distances respectives l'_4 et l''_4 du point 4 *bis* respectivement aux points 4 et 5

$$l'_4 = l_4 \frac{D_4}{D_4 + R_5}, \qquad l''_4 = l_4 \frac{R_5}{D_4 + R_5}.$$

Dès lors, la longueur applicable au profil D_4 est $\frac{l_3 + l'_4}{2}$, celle applicable au profil R_5, $\frac{l''_4 + l_5}{2}$. Tout revient donc à introduire dans la série des profils en travers utilisés pour la cubature un profil fictif d'aire nulle en chaque point de passage, la longueur des talus d'un tel profil étant également nulle, et sa largeur d'emprise égale à la largeur de la plateforme.

Moyennant cette introduction, l'usage des formules (1), (2) et (3) du numéro précédent peut être considéré comme absolument général.

L'évaluation des cubes étant réduite à celle des aires définies par la figure 96 pourra s'obtenir à l'aide des planimètres ou intégromètres dont il sera question plus loin. Il y a lieu toutefois de tenir compte des échelles adoptées pour les abscisses et les ordonnées. Supposons que sur l'axe des abscisses le mètre soit représenté par λ^{mm} et qu'en ordonnée le mètre carré soit représenté par μ^{mm}; chaque volume exprimé en mètres cubes sera alors égal au quotient par $\lambda\mu$ de la surface correspondante mesurée en millimètres carrés sur la figure 96.

74. *Parties courbes.* — Nous avons raisonné jusqu'ici en supposant la projection horizontale de l'axe uniquement rectiligne. Or cette projection se compose en réalité d'une suite d'alignements droits raccordés par des parties courbes. Y a-t-il lieu, dans ces parties courbes, de modifier le mode d'évaluation qui vient d'être indiqué pour les volumes?

Considérons deux profils en travers infiniment voisins, normaux à

l'axe. Ils se coupent suivant une droite verticale Δ. Soit, pour un de ces profils, r la distance horizontale de la droite Δ à l'axe, c'est-à-dire le rayon de courbure de la projection horizontale de cet axe, δ la distance horizontale du centre de gravité du profil à l'axe. Le volume élémentaire compris entre les deux profils infiniment voisins (supposés en remblai pour fixer les idées) sera donné par

$$dV = R(r \pm \delta)\,d\omega,$$

$d\omega$ étant l'angle infiniment petit des deux profils, et δ étant affecté du signe + ou du signe — suivant que le centre de gravité est du côté de la convexité ou de la concavité de l'axe.

Cette expression peut s'écrire, si l'on appelle toujours dl la distance des deux profils comptée sur l'axe,

$$dV = R\,dl \pm R\,\delta\,d\omega.$$

Si la ligne du terrain naturel est horizontale, δ est nul et l'élément de volume est rigoureusement le même qu'au n° 72. En tout cas, dans la pratique, δ est généralement assez petit pour que le terme correctif soit négligeable. D'ailleurs, sur toute la longueur du tracé, on rencontre des parties où il est positif (celles où le terrain monte vers l'intérieur de la courbe), d'autres où il est négatif (celles où le terrain descend vers l'intérieur de la courbe), et il en résulte une certaine compensation.

Quoi qu'il en soit, l'expérience a prouvé qu'il n'y avait nul inconvénient, pour l'estimation du cube, à ne pas tenir compte des termes correctifs à introduire pour les parties courbes et, par suite, à faire cette estimation en considérant l'axe comme rectiligne en plan sur toute son étendue.

Il n'y a donc, après avoir déterminé les points de passage comme il a été dit au n° 73, qu'à appliquer les formules du n° 72 qui supposent qu'on a d'abord obtenu, pour chaque profil en travers, les aires R et D de remblai et de déblai, la largeur d'emprise E et la longueur du talus T. C'est à cette recherche que nous allons maintenant procéder.

II. — Évaluation des éléments des profils en travers.

Nous allons passer en revue les divers procédés proposés pour cette évaluation. Ceux des deux premières catégories supposant qu'on opère sur le dessin même des profils en travers, on y mesure directement la

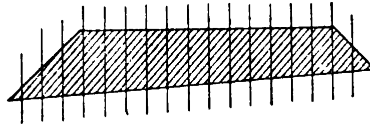
largeur d'emprise et la longueur du talus. Seule, l'aire doit faire l'objet d'une détermination spéciale.

D'ailleurs, l'échelle adoptée pour le dessin des profils étant celle de 5^{mm} par mètre, la largeur d'emprise et la longueur du talus se mesureront au moyen du double décimètre, le double du nombre de centimètres lu donnant le nombre de mètres.

A. — Procédés mécaniques.

75. *Roulette Dupuit.* — On place, sur le dessin du profil, un transparent portant des parallèles équidistantes de 5^{mm}, perpendiculaires à un axe que l'on fait coïncider avec la ligne de plateforme (*fig.* 97).

Fig. 97.

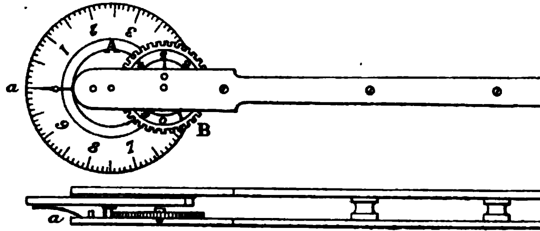


Si $y_1, y_2, y_3, \ldots$ sont en millimètres les segments déterminés sur ces diverses parallèles par le contour du profil, on a, pour la surface évaluée en millimètres carrés, sur le dessin,

$$S = \sum 5 \frac{y_{n-1} + y_n}{2} = 5 \sum y.$$

Or, à l'échelle de ce dessin (5^{mm} par mètre), 1^{m^2} est représenté

Fig. 98.



par 25^{mm^2}. La surface du profil en mètres carrés est donc donnée par

$$S = \frac{5 \Sigma y}{25} = \frac{\Sigma y}{5}.$$

Donc l'aire cherchée en mètres carrés est donnée par le cinquième

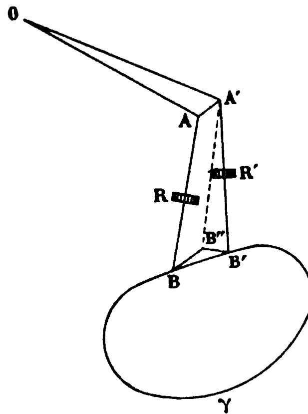
de la somme des ordonnées y exprimées en millimètres. Cette somme s'obtient au moyen d'un curvimètre quelconque et notamment de la roulette Dupuit représentée ci-contre (*fig.* 98), dont la circonférence, longue de 10^{cm}, est graduée en millimètres, les tours complets de cette roulette A étant enregistrés par le compteur B porté par le même étrier que la roulette. Si, après avoir suivi toutes les ordonnées y avec la roulette primitivement mise au zéro, on lit 3 sur le compteur et 62 sur la roulette, en face de l'index a, on a

$$S = \frac{362}{5} = 72^{m^2},4.$$

76. *Planimètre et intégromètres.* — Ces instruments sont tels que, si l'on parcourt avec un traçoir qui leur est fixé le contour d'une aire fermée, un enregistreur fixé à l'appareil fait connaître cette aire.

Le planimètre d'Amsler se compose de deux tiges OA et AB articulées en A portant en leurs extrémités l'une une pointe O que l'on fixe sur le plan, l'autre le traçoir B (*fig.* 99). En outre, à la tige AB

Fig. 99.



est fixée une roulette R tournant dans un plan perpendiculaire à cette tige sur le plan qui contient le contour γ, roulette dont les tours et fractions de tour sont enregistrés par un compteur spécial.

Considérons deux positions infiniment voisines OAB, OA'B' du système, et menons A'B'' égal et parallèle à AB. L'aire BB'B'' étant infiniment petite du second ordre, on a, en appelant $d\sigma$ la différen-

tielle substituée à l'aire infiniment petite ABB'A'

$$d\sigma = l\,dh + \frac{l^2}{2}\,d\alpha,$$

l désignant la longueur AB, dh la distance des parallèles AB et A'B'', $d\alpha$ l'angle B''A'B'.

Si maintenant $d\rho$ est la longueur du roulement de la roulette de R en R', on a

$$d\rho = dh + \lambda\,d\alpha,$$

λ étant la longueur AR.

Éliminant dh entre ces deux équations, on a

$$d\sigma = l\,d\rho + \left(\frac{l^2}{2} - \lambda l\right) d\alpha,$$

et, en intégrant pour tout le contour γ,

$$\sigma = l\rho + \left(\frac{l^2}{2} - \lambda l\right) \int_\gamma d\alpha.$$

Or, si le point A est constamment extérieur au contour γ, l'intégrale $\int_\gamma d\alpha$ est nulle, et

$$\sigma = l\rho.$$

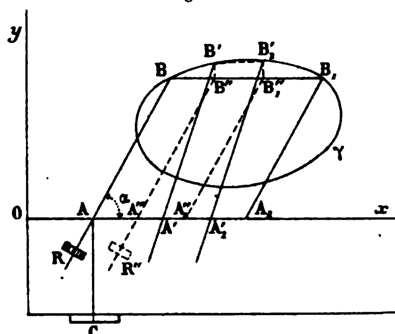
L'aire est donc proportionnelle à ρ, et en graduant convenablement le compteur on lira directement σ.

Remarquons que si le point A décrit, aller et retour, un élément de ligne quelconque, extérieur à γ, lorsque le traçoir décrit tout le contour γ, le résultat précédent subsiste. En particulier, on pourra faire décrire au point A un segment de droite. Tel est le cas pour l'intégromètre, imaginé séparément par M. Amsler et par M. Marcel Deprez, dont le principe peut encore être exposé comme suit : deux tiges AB et AC étant articulées en A (*fig.* 100), la tige AC reste fixée perpendiculairement à un chariot C astreint à parcourir une parallèle à Ox de façon que le point A se déplace sur Ox, tandis que la tige AB porte un traçoir B avec lequel on suit le contour γ et une roulette R tournant dans un plan normal à AB, et dont le roulement est enregistré.

Pour passer de la position AB à la position infiniment voisine A'B', la tige AB peut être amenée par une translation parallèle à Ox, en A''B'' : il suffit ensuite d'amener A'' en A' pendant que B'' vient en B'. Dans

ces deux déplacements la roue R a un roulement élémentaire. Mais, lorsqu'en parcourant le contour γ, le traçoir repassera du point B'_1 au point B_1, situés respectivement sur les parallèles à Ox menées par B' et par B, les positions $A'_1B'_1$ et $A''_1B''_1$ de la tige étant respectivement parallèles à $A'B'$ et $A''B''$, le roulement correspondant au mouve-

Fig. 100.



ment de B parallèle à Oy sera égal et de sens contraire au roulement analogue dans le passage de B'' en B'. Donc, dans le parcours total, les roulements élémentaires correspondant aux déplacements parallèles à Oy s'annulent et il n'y a lieu de considérer que ceux qui correspondent aux déplacements parallèles à Ox. Le roulement correspondant au déplacement parallèle à Ox dans le passage de B en B' est donné par la distance dh de AB et $A''B''$.

Donc

$$d\rho = dh = dx \sin\alpha,$$

ou, en posant $AB = l$,

$$d\rho = dx \frac{y}{l}.$$

Par suite

$$\rho = \frac{1}{l}\int_\gamma y\,dx = \frac{\sigma}{l},$$

et l'aire σ est bien encore proportionnelle à ρ. Il suffit donc que le compteur du roulement de la roulette soit convenablement gradué pour qu'il donne directement σ.

77. *Évaluation des moments.* — Nous ne quitterons par ce sujet sans remarquer qu'une légère modification de l'intégromètre permet de lui faire enregistrer le moment de l'aire σ par rapport à Ox.

Supposons que la roulette R soit liée à un système d'engrenages planétaires, fixé à la tige AR et tel que l'axe RT de la roulette fasse avec la direction de Ox un angle β (*fig.* 101) donné par

$$\beta = 2\alpha - \frac{\pi}{2}.$$

Le roulement élémentaire $d\rho$ sera alors donné par RR_1 tel que $R''R_1$ soit perpendiculaire à RR_1, c'est-à-dire par

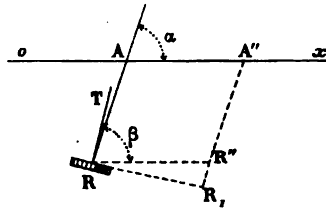
$$\begin{aligned} d\rho &= dx \sin\beta \\ &= -\, dx \cos 2\alpha \\ &= -(1 - 2\sin^2\alpha)\, dx. \end{aligned}$$

Alors

$$\rho = -\int dx + 2\int_\gamma \frac{y^2}{l^2}\, dx.$$

La première intégrale est évidemment nulle pour le contour entier.

Fig. 101.



En outre, si μ est le moment de σ par rapport à Ox,

$$\mu = \int_\gamma \frac{y^2\, dx}{2}.$$

Donc

$$\rho = \frac{4\mu}{l^2},$$

et μ est proportionnel à la nouvelle valeur de ρ.

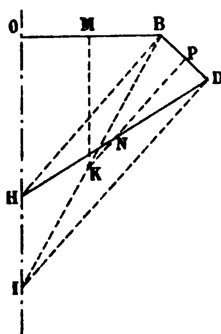
Afin que l'intégromètre puisse servir tantôt au calcul de σ, tantôt à celui de μ, la roulette R est tenue par un étrier qu'on peut, au moyen de vis *ad hoc,* fixer, soit à la tige AB, soit à l'engrenage planétaire établissant entre les angles α et β la relation voulue.

B. — PROCÉDÉS GÉOMÉTRIQUES.

Dans les procédés qui suivent, on opère par demi-profils, la ligne du terrain naturel étant d'ailleurs assimilée à une droite que définissent sa pente et la cote sur l'axe, appelée aussi, dans l'usage technique, la *cote rouge*.

78. *Réduction à un segment de droite. Procédés Garceau et Collignon.* — Soit à évaluer le demi-profil OBDH. Menant par D la

Fig. 102.



parallèle DI à BH, on obtient le triangle OBI équivalent (*fig.* 102). L'aire de ce triangle est donnée en mètres carrés par

$$S = \frac{OB \times OI}{2},$$

OB et OI étant évalués en mètres. Soit b la longueur en mètres de OB sur le terrain, Z la longueur en millimètres de OI sur le dessin, μ la longueur en millimètres du mètre sur le dessin, on a

$$S = \frac{b \times Z}{2\mu}.$$

Supposons donc que l'on mesure OI avec une règle graduée sur laquelle l'unité de longueur comprenne $\frac{2\mu}{b}$ millimètres. Le chiffre lu sur cette règle sera alors précisément égal à S. Par exemple, si $b = 5^{m}$ et $\mu = 5^{mm}$, l'unité de longueur de la règle devra être de 2^{mm}. Ce procédé est dû à M. Garceau, ingénieur des ponts et chaussées.

On peut, comme on va voir, y rattacher le suivant qui a été déduit, par M. l'inspecteur général Collignon, d'un théorème qu'on trouvera plus loin (n° 94).

Prenons la figure homothétique de OID par rapport au point B, le rapport d'homothétie étant $\frac{1}{2}$. A la droite OI correspond la perpendiculaire MK élevée à OB en son milieu M, à la droite DI la parallèle qui lui est menée par le milieu P de BD, ou, puisque DI est parallèle à BH, la droite joignant le milieu P de BD au milieu N de HD. Cette droite coupe la première au point K et l'on a $MK = \frac{OI}{2}$, d'où, en appelant Z′ la longueur en millimètres de MK :

$$S = \frac{b \times Z'}{\mu}.$$

Il suffit alors de mesurer MK avec une règle graduée sur laquelle l'unité de longueur est $\frac{\mu}{b}$. Par exemple, dans l'exemple précédent, pour lequel $\mu = 5$ et $b = 5$, il suffirait de mesurer MK en millimètres.

79. *Procédé Willotte* [1]. — Soit ZOBT le gabarit d'un demi-profil de remblai (*fig.* 103). Pour compléter chaque demi-profil, il

Fig. 103.

faudrait, sur ce gabarit, tracer la ligne HD du terrain naturel.

Si l'aire OBDH = R reste constante, il en est de même de l'aire IHD,

(1) *Annales des Ponts et Chaussées*, 2e semestre 1880, p. 303.

et, par suite, la ligne HD a pour enveloppe une hyperbole d'asymptotes IZ et IT. Supposons tracées un certain nombre de ces hyperboles cotées au moyen de la valeur correspondante de R. L'aire cherchée pour chaque demi-profil sera alors donnée par la cote de celle de ces courbes à laquelle sera tangente la ligne de terrain HD correspondante. Il sera d'ailleurs inutile de tracer cette ligne si l'on a construit sur un transparent un rapporteur de centre O′ gradué sur le bord U′V′ suivant les tangentes des angles θ. Ayant placé le centre O′ en coïncidence avec le point H de OZ dont la cote z est celle du demi-profil considéré, on n'a qu'à amener le point coté θ du rapporteur sur OZ pour que le bord O′X′ prenne la direction de HD. La cote de l'hyperbole à laquelle ce bord O′X′ est alors tangent fait connaître l'aire cherchée.

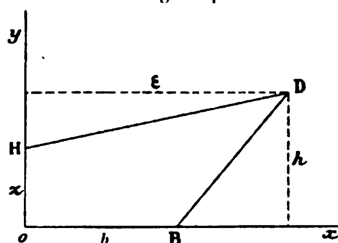
Quant à la largeur d'emprise E et à la longueur du talus T, elles ne dépendent que de la position du point D sur BT. Si l'on suppose les valeurs de ces quantités inscrites à côté de chaque point D, il en résulte le long de BT deux graduations, l'une pour E, l'autre pour T, portées de part et d'autre de cet axe. Les cotes des points de ces graduations par lesquels passe O′X′ font alors connaître E et T.

La même disposition peut s'appliquer au déblai, et encore à chacune des parties d'un profil mixte.

C. — Procédé algébrique

80. *Formules préliminaires.* — Cherchons les coordonnées ε et h du point de rencontre D des droites BD et HD (*fig.* 104) dont les

Fig. 104.



coefficients angulaires sont respectivement m et θ et qui ont, par conséquent, pour équations :

(BD) $$y = m(x - b),$$
(HD) $$y = z + \theta x.$$

On a, en retranchant,

$$x(m-\theta)=mb+z,$$

d'où, puisque au point commun, $x=\varepsilon$,

$$\varepsilon=\frac{mb+z}{m-\theta}, \tag{1}$$

puis, d'après l'équation de BD,

$$h=m(\varepsilon-b). \tag{2}$$

On déduit de là, pour la longueur λ de BD,

$$\lambda=\frac{\varepsilon-b}{\cos B}$$

ou

$$\lambda=\sqrt{1+m^2}(\varepsilon-b). \tag{3}$$

L'ordonnée à l'origine HD est donnée par

$$x_0=-\frac{z}{\theta}. \tag{4}$$

81. *Définition des divers demi-profils. Calcul de leurs éléments.* — Il n'y a lieu, au point de vue pratique, de considérer que quatre types de demi-profil (*fig.* 105).

Ces divers demi-profils sont définis par les constantes suivantes :

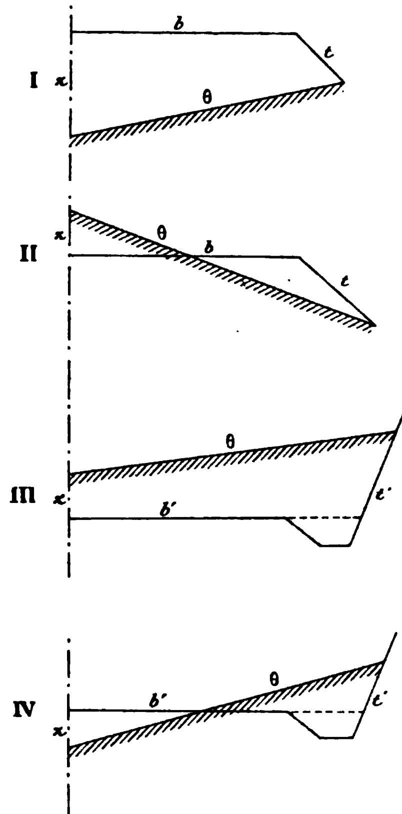
b, largeur de la demi-plateforme,
b', la même augmentée de la largeur du fossé,
t, pente du talus de remblai, *prise en valeur absolue*,
t', pente du talus de déblai,
F et φ, aire et contour du fossé,

Auxquelles il faut joindre les variables :

z, cote sur l'axe du terrain naturel par rapport à la plateforme (remblai —, déblai +),
θ, déclivité transversale du terrain prise avec le signe + ou le signe — suivant que le sol s'élève ou s'abaisse à partir de l'axe.

Les quantités à déterminer pour chaque demi-profil sont les aires de remblai et de déblai R et D, la largeur d'emprise E, et la longueur du talus T.

Fig. 105.



I. Demi-profil ordinaire en remblai.
II. » mixte en remblai.
III. » ordinaire en déblai.
IV. » mixte en déblai.

I. (*fig.* 106). — On a ici $m = -t$.

Les conditions qui définissent le cas sont

$$z < 0 \quad \text{et} \quad x > b$$

ou, d'après (4),

$$z < 0, \quad z + b\theta < 0.$$

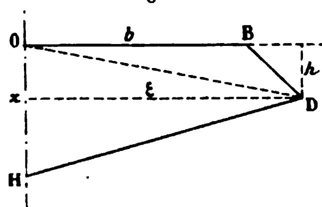
La largeur d'emprise est donnée, d'après (1), par

$$E = \varepsilon = \frac{bt - z}{t + \theta},$$

et la longueur du talus, égale à λ, d'après (3) par

$$T = \sqrt{1 + t^2}(\varepsilon - b).$$

Fig. 106.



Quant à la surface, toute en remblai, elle est donnée en valeur absolue par

$$R = OBD + OHD$$

ou, en tenant compte des signes de h et z,

$$R = \frac{-bh - \varepsilon z}{2}$$

ou, d'après (2),

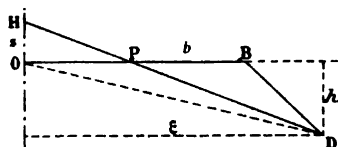
$$R = \frac{bt(\varepsilon - b) - \varepsilon z}{2},$$

$$= \frac{\varepsilon(bt - z)}{2} - \frac{b^2 t}{2},$$

$$= \frac{(bt - z)^2}{2(t + \theta)} - \frac{b^2 t}{2}.$$

II. (*fig.* 107). — On a encore $m = -t$.

Fig. 107.



Les conditions sont ici

$$z > 0 \qquad \text{et} \qquad x_0 < b.$$

Cette seconde condition s'écrit, d'après (4),

$$-\frac{z}{\theta} < b$$

ou, *puisque* θ *est négatif*,

$$-z > b\theta,$$

c'est-à-dire

$$z + b\theta < 0.$$

On a donc les conditions

$$z > 0, \qquad z + b\theta < 0.$$

Les longueurs E et T sont données par les mêmes formules qu'au cas précédent. Quant à l'aire, elle se décompose en une aire de déblai

$$D = \text{OHP} = \frac{1}{2} z \frac{z}{|\theta|} = \frac{z^2}{2|\theta|},$$

$|\theta|$ représentant la valeur absolue de θ, et une aire de remblai

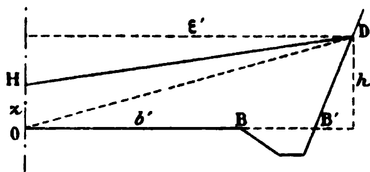
$$\begin{aligned} R = \text{BDP} &= \text{OBD} + \text{OHP} - \text{OHD}, \\ &= \frac{-bh}{2} + \frac{z^2}{2|\theta|} - \frac{\varepsilon z}{2}, \\ &= \frac{-bh - \varepsilon z}{2} + \frac{z^2}{2|\theta|}. \end{aligned}$$

Le même calcul qu'au cas précédent transforme cette équation en

$$R = \frac{(bt - z)^2}{2(t + \theta)} - \frac{b^2 t}{2} + \frac{z^2}{2|\theta|}.$$

III. (*fig.* 108). — On a ici $m = t'$.

Fig. 108.



Les conditions sont

$$z > 0$$

et, si $\theta < 0$,

$$x_0 > b$$

ou, en tenant compte, comme au cas II, de ce que $\theta < 0$,

$$z + b\theta > 0.$$

Donc, en résumé,

$$z > 0, \qquad z + b\theta > 0.$$

La largeur d'emprise est alors donnée par

$$E = \varepsilon' = \frac{b't' + z}{t' - \theta}$$

et la longueur du talus, égale à la somme de λ et du contour φ du fossé, par

$$T = \sqrt{1 + t'^2}(\varepsilon' - b') + \varphi.$$

L'aire, toute en déblai, est donnée, y compris le fossé F, par

$$\begin{aligned} D &= \mathrm{OBD} + \mathrm{OHD} + F, \\ &= \frac{b'h + \varepsilon' z}{2} + F, \\ &= \frac{b't'(\varepsilon' - b') + \varepsilon' z}{2} + F, \\ &= \frac{\varepsilon'(b't' + z)}{2} - \frac{b'^2 t'}{2} + F, \\ &= \frac{(b't' + z)^2}{2(t' - \theta)} - \frac{b'^2 t'}{2} + F. \end{aligned}$$

IV. (*fig.* 109). — Ici encore $m = t'$.

Fig. 109.

Les conditions sont

$$z < 0 \quad \text{et} \quad x_0 < b,$$

ou

$$z < 0, \qquad z + b\theta > 0.$$

La largeur d'emprise E et la longueur de talus T sont les mêmes qu'au cas III.

La surface se décompose en une surface R en remblai donnée par

$$R = OPH = \frac{1}{2} z \frac{z}{\theta} = \frac{z^2}{2\theta}$$

et une surface D en déblai donnée, y compris le fossé, par

$$\begin{aligned} D &= PB'D + F, \\ &= OB'D + OPH - OHD + F, \\ &= \frac{b'h}{2} + \frac{z^2}{2\theta} - \frac{-z\varepsilon'}{2} + F, \\ &= \frac{b'h + \varepsilon' z}{2} + \frac{z^2}{2\theta} + F, \end{aligned}$$

ou, par le même calcul qu'au cas III,

$$D = \frac{(b't' + z)^2}{2(t' - \theta)} - \frac{b'^2 t'}{2} + F + \frac{z^2}{2\theta}.$$

Résumé. — Posant, pour simplifier les écritures,

$$bt = a, \qquad b't' = a', \qquad \frac{b^2 t}{2} = c, \qquad \frac{b'^2 t'}{2} - F = c',$$

$$\sqrt{1 + t^2} = s, \qquad \sqrt{1 + t'^2} = s', \qquad bs = \beta, \qquad b's' - \varphi = \beta',$$

puis

(R) $\varepsilon = \dfrac{a - z}{t + \theta}, \qquad \tau = s\varepsilon - \beta, \qquad \sigma = \dfrac{(a - z)^2}{2(t + \theta)} - c,$

(D) $\varepsilon' = \dfrac{a' + z}{t' - \theta}, \qquad \tau' = s'\varepsilon' - \beta', \qquad \sigma' = \dfrac{(a' + z)^2}{2(t' - \theta)} - c',$

(C) $\gamma = \dfrac{z^2}{2|\theta|},$

on voit que l'on a, pour les inconnues, dans les divers cas, les valeurs ci-après :

	E.	T.	R.	D.
I..............	ε	τ	σ	0
II..............	ε	τ	$\sigma + \gamma$	γ
III.............	ε'	τ'	0	σ'
IV.............	ε'	τ'	γ	$\sigma' + \gamma$

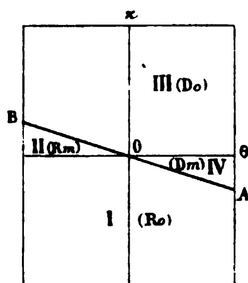
Les groupes de formules (R), (D), (C) sont dits respectivement les groupes du *remblai*, du *déblai* et du *terme complémentaire*.

Quant à la distinction des cas, elle peut se faire par le procédé géométrique bien simple que voici, qui a été proposé par Lalanne. Puisque les éléments qui varient d'un demi-profil à l'autre sont θ et z,

on peut, en les prenant comme coordonnées d'un point, faire correspondre à chaque demi-profil un point du plan rapporté aux axes $O\theta$ et Oz (*fig.* 110).

Suivant que $z > 0$ ou $z < 0$, ce point est au-dessus ou au-dessous

Fig. 110.



de l'axe $O\theta$, suivant que $z + b\theta > 0$ ou $z + b\theta < 0$, le point est au-dessus ou au-dessous de la droite AB dont l'équation est $z + b\theta = 0$. Par suite, les points correspondant aux demi-profils des divers cas sont répartis entre les quatre aires désignées sur la figure par les numéros romains correspondants.

82. *Méthode de cubature simplifiée.* — Avant d'examiner les divers procédés qui ont été proposés pour le calcul rapide des formules des groupes (R), (D) et (C), il convient d'examiner ce que donnent ces formules lorsque la déclivité transversale du terrain est nulle dans tous les profils.

Occupons-nous d'abord du remblai. L'aire de chaque profil est égale au double de l'aire R calculée dans le cas I lorsqu'on y fait $\theta = 0$, ce qui donne

$$\frac{z^2}{t} - 2bz,$$

ou, puisque la cote est négative, si l'on prend pour z la valeur absolue de cette cote,

$$\frac{z^2}{t} + 2b\,|z|.$$

Le volume V_R du remblai est alors donné, si l'on appelle l la longueur supposée constante de chaque entreprofil, par

$$V_R = l\sum\left(\frac{z^2}{t} + 2b\,|z|\right),$$

qu'on peut écrire, en appelant n le nombre des entreprofils et L la longueur totale,

$$V_R = L\left[\frac{1}{t}\sum\frac{z^2}{n} + 2b\sum\frac{|z|}{n}\right].$$

Il suffit, dès lors, pour avoir le volume, de calculer les moyennes des cotes z et de leurs carrés z^2.

Dans le cas du déblai, la formule sera la même moyennant le changement de t et b en t' et b', et l'adjonction du volume des deux fossés 2 FL.

Si l'on décompose le volume en entreprofils infiniment petits de longueur dl, la formule peut s'écrire

$$V_R = \frac{1}{t}\int z^2\,dl + 2b\int |z|\,dl$$

ou

$$V_R = \frac{2}{t}\int\frac{z^2\,dl}{2} + 2b\int |z|\,dl.$$

Si l'on considère l'aire balayée par les ordonnées z, la seconde intégrale représente cette aire S, la première son moment M par rapport à l'axe, et la formule s'écrit

$$V_R = 2\left(\frac{M}{t} + bS\right).$$

Ayant donc, au point correspondant à chaque profil, élevé à l'axe une perpendiculaire égale à la cote z, correspondante, puis rejoint par une ligne brisée les extrémités de ces ordonnées, on n'a qu'à déterminer, au moyen d'un intégromètre, la surface S et le moment M, par rapport à l'axe, de l'aire ainsi déterminée pour avoir le volume correspondant.

De même pour le déblai en ajoutant le volume 2 FL des deux fossés.

83. *Réduction de la déclivité du terrain à l'horizon.* — Afin de permettre dans tous les cas l'emploi de cette méthode, M. Boulangier, ingénieur des Ponts et chaussées, a proposé de transformer géométriquement chaque profil en un profil équivalent limité à une ligne de terrain horizontale.

Soit C′D′ la ligne horizontale donnant la même aire que CD (*fig.* 111).

On a

$$IC.ID = \overline{IC'}^2,$$

ou, en projetant sur IO,

$$Ic.Id = \overline{Ih}^2.$$

Fig. 111.

Si donc le cercle décrit sur I*c* comme diamètre coupe en K l'horizontale D*d*, on a

$$Ih = IK.$$

On pourrait éviter la construction en traçant d'avance sur un transparent (*fig.* 112) un certain nombre de cercles Γ_1 passant par I et de

Fig. 112.

cercles Γ_2 de centre I, ces derniers étant cotés au moyen de la valeur de O*h* correspondante.

Ces cercles pourraient d'ailleurs être limités à deux axes qu'on mettrait en coïncidence avec OB et OH. La cote sur l'axe correspondant à la ligne de terrain horizontale serait alors la cote du cercle Γ_2 passant par le point de rencontre de l'horizontale D*d* et du cercle Γ_1 aboutissant au point *c* de l'axe.

Si l'on effectue cette construction sur des profils en travers pris dans la réalité, on est frappé par ce fait que les points H et h sont presque en coïncidence. Il en résulte que (sauf pour les parties, exceptionnelles en pratique, où l'on a affaire à des profils mixtes) l'on obtient déjà une assez grande approximation en regardant partout comme nulle la déclivité transversale du terrain.

On peut se rendre compte de cette approximation par le calcul.

Supposons que dans un profil en remblai la déclivité transversale du terrain soit θ. Elle est montante pour un des demi-profils dont l'aire σ_1 est dès lors donnée par

$$\sigma_1 + c = \frac{(a-z)^2}{2(t+\theta)} = \frac{(a-z)^2}{2t}\left(1 - \frac{\theta}{t} + \frac{\theta^2}{t^2} - \ldots\right),$$

descendante pour le second dont l'aire σ_2 est de même donnée par

$$\sigma_2 + c = \frac{(a-z)^2}{2t}\left(1 + \frac{\theta}{t} + \frac{\theta^2}{t^2} + \ldots\right).$$

Faisant la somme de ces deux égalités, on a, pour l'aire totale en remblai R,

$$R + 2c = \frac{(a-z)^2}{t}\left(1 + \frac{\theta^2}{t^2} + \ldots\right).$$

Donc, lorsqu'on se place dans l'hypothèse $\theta = 0$, on ne néglige en réalité qu'un terme de l'ordre de $\frac{\theta^2}{t^2}$ auprès de l'unité. Ce terme est généralement fort petit. Prenons, par exemple, $\theta = 0{,}05$, $t = 1{,}5$.

Nous avons, dans ce cas, $\frac{\theta^2}{t^2} = \frac{1}{900}$.

84. *Tables numériques.* — L'aire σ d'un demi-profil dépendant de deux variables z et θ, on peut construire, pour des profils-types donnés, des Tables à double entrée faisant connaître σ. De telles Tables ont été calculées par Coriolis d'une part, par Lefort de l'autre, pour certains types de profils ([1]). Mais on ne saurait s'astreindre aux calculs pénibles et longs qu'exige l'établissement de telles Tables

---

([1]) Dans les Tables de Coriolis, qui ne donnent d'ailleurs que σ (et point ε et τ), c'est z qui sert d'entrée dans la colonne et θ dans la rangée horizontale. C'est le contraire pour les Tables de Lefort qui donnent d'ailleurs ε en même temps que σ, puis τ par une Table supplémentaire. Dans les unes et les autres, les colonnes correspondant au remblai d'une part, au déblai de l'autre, sont accolées ensemble, et chaque double colonne correspondant à une valeur déterminée de l'entrée supérieure occupe une page. Dans les Tables de Lefort, on trouve, en outre, une colonne de différences pour l'interpolation par parties proportionnelles.

lorsqu'on fait varier les types de profils auxquels elles s'appliquent. Les Tables graphiques dont il va être maintenant question, outre l'avantage d'une exécution bien plus rapide, ont encore celui de permettre d'obtenir les résultats intermédiaires entre ceux qui sont inscrits par une simple interpolation à vue. Enfin, plusieurs d'entre eux jouissent de la propriété de fournir, par une même lecture, à la fois ε, τ et σ.

D. — Procédés nomographiques [1].

85. *Principe.* — Remarquons d'abord que si, sur une Table graphique quelconque, on obtient une graduation faisant connaître ε, il suffira de placer à côté de celle-ci une seconde graduation pour τ, puisque τ est une fonction de ε seulement, d'après la seconde formule du groupe (R) ou du groupe (D) ci-dessus.

Nous n'avons donc à nous occuper que du calcul simultané de ε et de σ. Reprenons les formules qui définissent ces quantités en fonction de z et θ dans le cas du remblai. Pour le cas du déblai le calcul serait le même. Ces formules sont

$$\varepsilon = \frac{a - z}{\theta + t}, \tag{I}$$

$$\sigma + c = \frac{(a - z)^2}{2(\theta + t)}. \tag{II}$$

Si l'on pose d'une manière générale

$$a - z = U, \tag{1}$$

$$\theta + t = V, \tag{2}$$

U et V étant deux fractions rationnelles du premier degré en x et y, dont le rapport W soit aussi une fraction rationnelle du premier degré (ce qui aura lieu si U et V ont même numérateur ou même dénomi-

---

[1] La théorie générale des abaques ou nomogrammes, applicables à des équations quelconques, fait l'objet du *Traité de Nomographie* publié en 1899 par l'auteur à la librairie Gauthier-Villars. Les renvois à cet Ouvrage seront indiqués dans la suite par les lettres *T. de N.* On trouvera plus loin un résumé des principes fondamentaux de cette théorie.

Le procédé Willotte, rattaché ci-dessus aux procédés géométriques parce qu'il utilise le gabarit des profils, pourrait l'être aussi aux procédés nomographiques comme fondé sur l'emploi de systèmes cotés.

nateur), on a

$$(3) \qquad \varepsilon = \mathrm{W},$$

$$(4) \qquad \sigma + c = \frac{\mathrm{UW}}{2}.$$

Si l'on fait varier z dans (1), θ dans (2), ε dans (3), σ dans (4), on obtient quatre systèmes de lignes cotées respectivement au moyen des valeurs de ces variables et que nous appellerons les systèmes (z), (θ), (ε) et (σ). Les trois premiers seront composés de lignes droites, le quatrième de coniques.

L'équation (I) étant le résultat de l'élimination de x et y entre (1), (2) et (3), on voit que, si un système de valeurs de z, θ, ε, satisfait à (I), les lignes cotées correspondantes passent par un même point. De même, pour z, θ et σ, l'équation (II) étant le résultat de l'élimination de x et y entre (1), (2) et (4).

Il en résulte que sur le Tableau ou *abaque* formé par l'entrecroisement des quatre systèmes de lignes (z), (θ), (ε) et (σ), *on a les valeurs de ε et σ correspondant à des valeurs données de z et θ en lisant les cotes des lignes des troisième et quatrième systèmes passant par le point de rencontre des lignes des premier et deuxième systèmes, cotées au moyen des valeurs données de z et θ.*

Répétons que pour avoir τ il suffit d'accoler une seconde graduation à celle qui fait connaître ε.

86. *Abaque Davaine.* — Si l'on prend pour U et V les fonctions

$$\mathrm{U} = x, \qquad \mathrm{V} = \frac{x}{y},$$

d'où

$$\mathrm{W} = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}} = y,$$

on a les quatre systèmes de lignes

$$(z) \qquad x + (z - a) = 0,$$

$$(\theta) \qquad y(\theta + t) - x = 0,$$

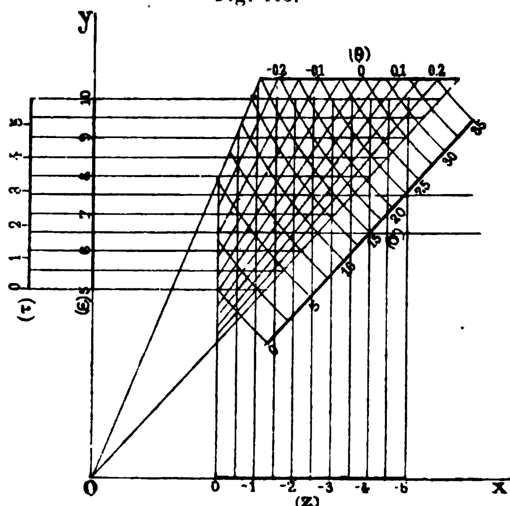
$$(\varepsilon) \qquad y - \varepsilon = 0,$$

$$(\sigma) \qquad xy - 2(\sigma + c) = 0,$$

qui constituent l'abaque auquel l'ingénieur en chef des Ponts et

Chaussées Davaine était parvenu en 1845 (¹) par des considérations de pure géométrie et dont la figure 113 donne le schéma. On voit que

Fig. 113.



les lignes (z) et (ε) sont des parallèles à Oy et à Ox, les lignes (θ) des droites issues de l'origine et les lignes (σ) des hyperboles équilatères ayant les axes pour asymptotes.

Il est facile de voir qu'aucun choix de fonctions *algébriques* U et V ne saurait donner quatre systèmes de lignes droites. Pour n'avoir donc, dans ce cas, à tracer que des droites il faut construire à part un abaque pour le calcul de ε et un autre pour le calcul de σ. On a pour chacun de ces deux abaques une infinité de variantes à lignes droites en choisissant encore trois fractions rationnelles quelconques U, V, W en x et y telles que

$$W = \frac{U}{V},$$

et en posant d'une part

$$U = a - z,$$
$$V = t + \theta,$$
$$W = \varepsilon,$$

de l'autre

$$U = (a - z)^2,$$
$$V = 2(t + \theta),$$
$$W = \sigma + c.$$

(¹) *Mémoires de la Société des Sciences de Lille*, 1845.

On voit que les abaques ainsi obtenus pour ε et pour σ sont à lignes droites. Dans cette catégorie rentrent les abaques de MM. Massau, Switkowski, Paulin, Lanave, Rouit (voir *T. de N.*, p. 268 à 276).

87. *Abaque Lalanne*. — Pour avoir ε et σ sur *un seul* abaque uniquement composé de lignes droites, il faut prendre

$$U = 10^S,$$
$$V = 10^T,$$

S et T étant des fonctions linéaires en x et y, ce qui donne pour les quatre systèmes de lignes (z), (θ), (ε), (σ)

$$a - z = 10^S,$$
$$\theta + t = 10^T,$$
$$\varepsilon = 10^{S-T},$$
$$\sigma + c = \tfrac{1}{2}10^{2S-T}.$$

ou, en prenant les logarithmes vulgaires,

$$S = \log(a - z),$$
$$T = \log(\theta + t),$$
$$S - T = \log\varepsilon,$$
$$2S - T = \log(\sigma + c) + \log 2,$$

équations qui représentent quatre systèmes de droites, puisque S et T sont des fonctions linéaires en x et y. En prenant

$$S = \frac{x+y}{2},$$
$$T = y,$$

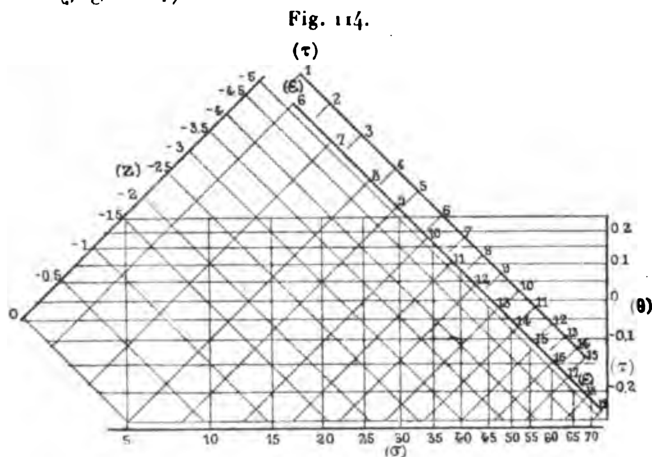
Lalanne ([1]) a obtenu les quatre systèmes de droites

$$x + y = 2\log(a - z),$$
$$y = \log(\theta + t),$$
$$x - y = 2\log\varepsilon,$$
$$x = \log(\sigma + c) + \log 2,$$

([1]) *Annales des Ponts et Chaussées*, 1er sem. 1850, p. 133. Le principe de l'anamorphose ici appliqué par Lalanne avait déjà été énoncé par lui dans le même Recueil (1er sem. 1846).

parallèles respectivement aux axes de coordonnées et à leurs deux bissectrices (*fig.* 114).

Fig. 114.



Tout ce qui vient d'être dit pour les formules du remblai s'applique sans changement à celles du déblai.

Quant à la formule du terme complémentaire

$$\gamma = \frac{z^2}{2\theta},$$

où θ est pris en *valeur absolue*, on peut la représenter au moyen des trois systèmes de droites

$$x = 2 \log z,$$
$$y = -\log \theta - \log 2,$$
$$x + y = \log \gamma.$$

Ces divers abaques, par l'entrecroisement des lignes qui les composent (d'où résulte promptement la fatigue de la vue), entraînent une chance d'erreur tenant à ce que, soit en suivant deux lignes cotées pour trouver leur point de rencontre, soit en suivant une troisième ligne cotée, passant par ce point de rencontre, pour aller lire sa cote, on risque de passer d'une ligne à l'autre. Afin d'écarter d'une façon absolue cette chance d'erreur, il faudrait n'associer, par le mode de représentation adopté, que des points cotés et cela d'une façon qui ne puisse prêter à aucune confusion. C'est un tel objet que réalisent, de diverses façons, les modes de représentation dont il va être maintenant question.

88. *Profilomètre Siégler* (1). — Supposons que l'on ait porté, avec une unité de longueur quelconque, sur Oy la graduation (z) définie par

$$y = a - z,$$

sur la partie positive de Ox la graduation (θ) définie par

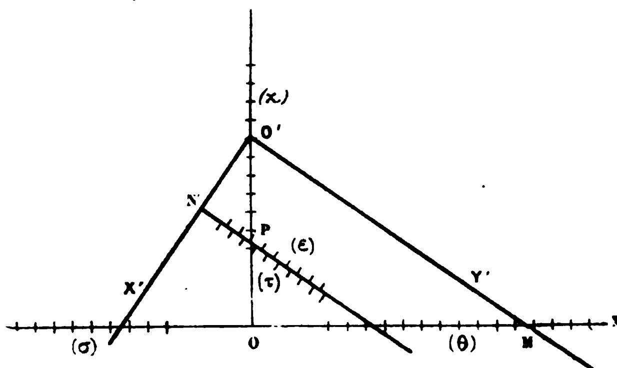
$$x = \theta + t,$$

et sur la partie négative de Ox la graduation (σ) définie par

$$x = \sigma + c.$$

Dès lors, si l'on place au point coté z l'origine O' de deux axes rectangulaires $O'x'$ et $O'y'$, dessinés sur un transparent (*fig.* 115), et

Fig. 115.



si l'on fait passer l'un de ces axes $O'y'$ par le point coté (θ), l'autre axe $O'x'$ passera par le point coté (σ) tel que

$$\sigma + c = \frac{(a - z)^2}{\theta + t}.$$

Pour avoir l'emprise il suffit, sur le transparent, de mener à $O'y'$ une parallèle à une distance $O'N'$ de l'origine égale à l'unité choisie, et de porter sur cette parallèle la graduation définie par

$$y' = \varepsilon.$$

La similitude des triangles $O'N'P$ et MOO' montre en effet que, si

(1) *Ann. des P. et Ch.*, 1er sem. 1881, p. 98.

l'axe Oy coupe NP au point coté ε, on a

$$\varepsilon = \frac{a - z}{\theta + t}.$$

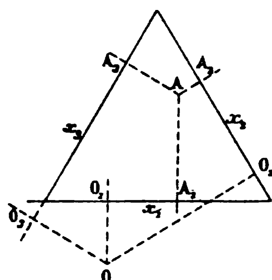
Le même mode de représentation est applicable aux formules du déblai et à celle du terme complémentaire.

89. *Abaques hexagonaux.* — La somme des projections d'un vecteur quelconque sur les côtés d'un angle de 120° égale la projection de ce vecteur sur la bissectrice de cet angle, ainsi que cela résulte de l'identité

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + \omega\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \omega\right) = 2\cos\omega\cos\frac{\pi}{3} = \cos\omega.$$

En se fondant sur cette remarque, M. Lallemand a proposé le type d'abaque suivant : soient O_1x_1, O_2x_2, O_3x_3 des axes parallèles aux droites qui viennent d'être définies, axes qui forment un triangle équilatéral (*fig.* 116). Prenons sur ces axes des origines O_1, O_2, O_3,

Fig. 116.



qui soient les projections d'un même point O du plan, et portons sur ces axes, à partir de ces origines, les graduations respectives

$$x_1 = 2\log(a - z),$$
$$x_2 = -\log(\theta + t),$$
$$x_3 = \log(\sigma + c) + \log 2.$$

Si un transparent muni de trois index parallèles à OO_1, OO_2 et OO_3 est déplacé sur l'abaque, en conservant une orientation constante, et si, dans une quelconque de ses positions, ses index coupent les

trois axes aux points A_1, A_2, A_3, on a, en vertu du lemme (par projection du vecteur non tracé OA sur O_1x_1, O_2x_2, O_3x_3)

$$O_3A_3 = O_1A_1 + O_2A_2,$$

et, par suite, d'après la construction des échelles,

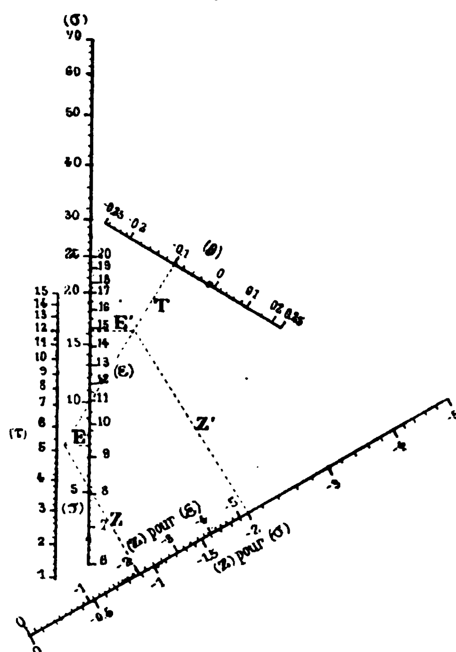
$$\log(\sigma + c) + \log 2 = 2\log(a - z) - \log(\theta + t)$$

qui est bien l'équation donnée.

Les index du transparent étant perpendiculaires aux côtés d'un triangle équilatéral sont constitués par les diagonales d'un hexagone régulier, d'où le nom d'abaque hexagonal.

On peut maintenir l'orientation de ce transparent en traçant sur l'abaque des parallèles équidistantes, assez rapprochées (de 5^m en 5^m par exemple), à la direction que doit conserver l'un des index.

Fig. 117.



Pour le calcul de ε la même échelle (θ) pourra servir, mais il faudra une nouvelle échelle (z) définie cette fois par

$$x'_1 = \log(a - z)$$

qu'on pourra disposer sur un axe $O'_1 x'_1$ parallèle à $O_1 x_1$, l'origine O'_1 se trouvant encore sur OO_1. La variable ε sera alors donnée par la graduation

$$x'_3 = \log \varepsilon,$$

portée sur un axe parallèle à $O_3 x_3$ avec son origine O'_3 sur OO_3.

Il faut donc donner au transparent deux positions successives pour obtenir σ d'une part, ε de l'autre, ainsi que le montre la figure 117.

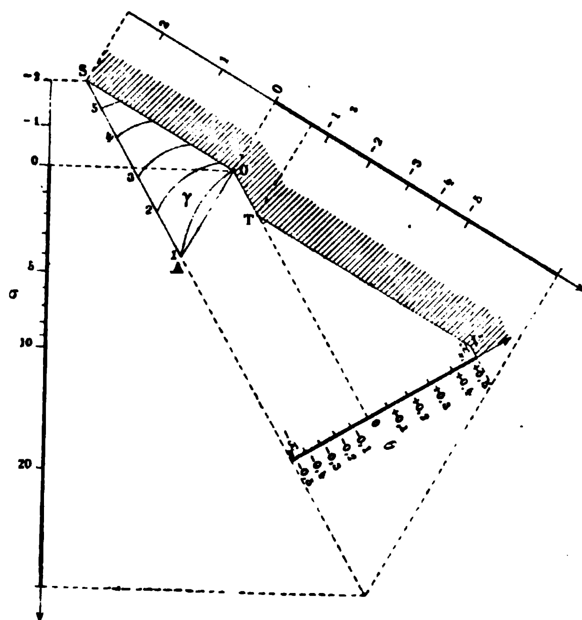
Cette circonstance constitue au procédé de l'abaque hexagonal, comme à celui de la règle à calcul indiqué plus loin, un certain désavantage par rapport à ceux qui utilisent la même échelle (z) avec la même échelle (θ) pour le calcul de σ et pour celui de ε.

On peut figurer sur chaque abaque les positions limites du centre du transparent correspondant aux conditions

$$z = 0, \qquad z + b\theta = 0.$$

Le premier de ces lieux est la perpendiculaire élevée à l'échelle (z)

Fig. 118.



par le point $z = 0$, le second une courbe transcendante qu'on peut construire point par point, mais qui, dans sa partie utile, diffère peu

d'une droite (*fig.* 118). On limite ainsi les régions à l'intérieur desquelles doit se trouver le centre du transparent pour que l'abaque soit utilisé seul, ou avec adjonction du terme complémentaire. On peut même, à l'intérieur de cette seconde région, tracer les courbes que décrit ce centre pour les diverses valeurs de γ déterminées par

$$\gamma = \frac{z^2}{2\theta}.$$

Dès lors si, pour une position du transparent définie par des valeurs données de z et θ, son centre tombe sur une courbe cotée γ, on sait qu'on est dans un cas mixte et que la valeur du terme complémentaire est précisément égale à la cote de cette courbe. L'ensemble de ces courbes (γ) constitue ce que M. Lallemand appelle une *échelle centrale additionnelle*.

Cet artifice est ingénieux, mais il faut remarquer que le tracé des courbes (γ) est assez long et délicat, que, d'ailleurs, la valeur de γ étant indépendante des données spécifiques a, t du projet, ce terme peut être représenté plus pratiquement *une fois pour toutes*, indépendamment de l'aire σ qui varie avec a et t (*voir* notamment au n° **91**).

90. *Règles à calcul.* — Les formules de l'un ou l'autre groupe, mises sous la forme logarithmique, sont susceptibles d'être représentées au moyen d'une règle à calcul.

On voit, en effet, que si les deux bords de la partie fixe de la règle portent respectivement les graduations

$$x = 2\log(a - z),$$

et

$$x = \log(\sigma + c) + \log 2,$$

et la réglette mobile la graduation

$$x = \log(\theta + t),$$

lorsque le point coté θ de la réglette mobile sera amené en face du point coté z de la première graduation de la règle fixe, l'origine de la réglette indiquera le point coté σ sur la seconde graduation de la règle (*fig.* 119).

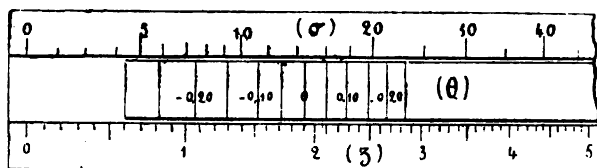
De même, pour ε, mais, ici encore, il faudra changer l'échelle (z) en prenant

$$x = \log(a - z).$$

Lorsqu'il s'agit d'un projet d'une certaine importance on peut, avec les valeurs des constantes correspondantes, faire construire une règle à calcul de ce genre. L'emploi en est évidemment très commode.

Pour la construction rapide d'une échelle logarithmique, on n'a

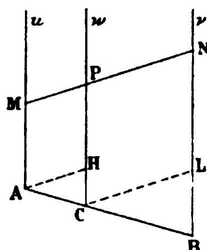
Fig. 119.



qu'à tracer une droite à travers une feuille de papier quadrillé logarithmiquement (comme il s'en trouve maintenant dans le commerce), cette droite étant menée par l'angle de la feuille servant d'origine sous une inclinaison qui varie suivant l'échelle qu'on veut obtenir.

91. *Nomogrammes à points alignés* [1]. — Les nomogrammes qui vont être maintenant décrits, tout aussi simples qu'une règle comme emploi, ont l'avantage d'un établissement des plus faciles.

Fig. 120.



Ils reposent sur le principe géométrique bien connu suivant :

Si par le point C (*fig*, 120) tel que

$$\frac{AC}{CB} = \frac{p}{q}$$

(1) La méthode des points alignés dont, pour la première fois, nous avons donné le principe dans les *Annales des Ponts et Chaussées* (2e semestre 1884, p. 531) se trouve exposée sous la forme la plus générale dans le Chapitre III du *T. de N.* Le Chapitre V (§ 1, B) du même ouvrage fait connaître son extension aux cas de plus de trois variables.

on mène la parallèle CP à AM et à BN, on a

$$(p+q)\mathrm{CP} = q\,\mathrm{AM} + p\,\mathrm{BN}.$$

Si, en effet, par A et C on mène des parallèles AH et CL à MN, on a

$$\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{BL}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mathrm{CP}-\mathrm{AM}}{\mathrm{BN}-\mathrm{CP}} = \frac{p}{q},$$

qui est la relation ci-dessus.

Supposons dès lors qu'on ait à représenter une équation de la forme

$$f(z_3) = p f(z_2) + q f(z_1),$$

où p et q sont des constantes.

Si l'on porte sur les axes parallèles Au et Bv, à partir des points A et B, les échelles définies par

$$u = f(z_1), \qquad v = f(z_2),$$

et qu'on prenne le point C tel que

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}} = \frac{p}{q},$$

la droite joignant les points M et N de cotes z_1 et z_2, déterminera, sur la parallèle Cw aux axes, menée par C, le segment CP tel que

$$(p+q)\mathrm{CP} = p f(z_2) + q f(z_1).$$

Si donc on porte sur Cw l'échelle

$$w = \frac{f(z_3)}{p+q},$$

la cote z_3 du point P sera telle que

$$f(z_3) = p f(z_2) + q f(z_1).$$

En particulier, ayant porté sur les axes Au et Bv les échelles

$$u = \log(a - z), \qquad v = -\log(\theta + t),$$

on n'aura, sur les axes Cw et C'w' tels que

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\mathrm{AC'}}{\mathrm{C'B}} = 1,$$

qu'à porter les échelles

$$w = \frac{\log(\sigma + c) + \log 2}{3},$$

$$w' = \frac{\log \varepsilon}{2},$$

pour avoir, en prenant un simple alignement entre les points cotés z et θ (de préférence au moyen d'un fil tendu), les valeurs de σ et ε satisfaisant aux équations

$$(R) \qquad \begin{cases} \log(\sigma + c) + \log 2 = 2\log(a - z) - \log(t + \theta), \\ \log\varepsilon = \log(a - z) - \log(t + \theta). \end{cases}$$

Ainsi qu'on l'a déjà remarqué, il suffit pour τ d'accoler une seconde graduation à celle faisant connaître ε.

On construit de même les nomogrammes des formules du déblai et du terme complémentaire, écrites respectivement

$$(D) \qquad \begin{cases} \log(\sigma' + c') + \log 2 = 2\log(a' + z) - \log(t' - \theta), \\ \log\varepsilon' = \log(a' + z) - \log(t' - \theta). \end{cases}$$

et

$$(C) \qquad \log\gamma + \log 2 = 2\log z - \log|\theta|.$$

Voyons comment on peut, sur de tels nomogrammes, figurer les conditions limites.

La condition $z < 0$ ou $z > 0$ se traduit par le fait que l'index servant à la lecture (le fil tendu dont il vient d'être question) coupe l'axe (z) d'un côté ou de l'autre du point coté o.

Reste la condition $z + b\theta > 0$ ou $z + b\theta < 0$.

Si, à chaque valeur de θ nous associons la valeur de z telle que

$$z + b\theta = 0,$$

nous avons l'ensemble des positions limites correspondantes de l'index. Nous examinerons si, rigoureusement, ou du moins avec une approximation suffisante, ces positions passent par un même point que nous appellerons *point d'arrêt*.

Remarquons d'abord que ce point d'arrêt se trouve nécessairement sur la droite qui joint les points $z = 0$ et $\theta = 0$. Cherchons donc l'intersection d une position limite quelconque de l'index avec cette droite.

Dans le cas du remblai : la distance u_0 du point coté z au point coté o de

l'axe (z) est donnée par

$$u_0 = \log(a - z) - \log a = \log\left(1 - \frac{z}{a}\right),$$

ou, en remplaçant a par sa valeur de définition ($a = bt$) et z par la valeur résultant de la condition limite ($z = -b\theta$),

$$u_0 = \log\left(1 + \frac{\theta}{t}\right).$$

D'autre part, la distance v_0 du point coté θ au point coté o sur l'axe (θ) est donnée par

$$v_0 = -[\log(t + \theta) - \log t] = -\log\left(1 + \frac{\theta}{t}\right).$$

La position correspondante de l'index (droite joignant les extrémités des segments u_0 et v_0) divise donc la distance des origines des axes (z) et (θ) dans le rapport

$$\frac{u_0}{v_0} = -1,$$

c'est-à-dire passe par son milieu.

Autrement dit, il existe rigoureusement ici un *point d'arrêt* qui est le point où la droite joignant les points $z = 0$, $\theta = 0$ coupe la parallèle équidistante des axes (z) et (θ) (point qui coïncide avec $\tau = 0$).

Dans le cas du déblai : On a de même

$$u_0 = \log\left(1 + \frac{z}{a'}\right) = \log\left(1 - \frac{b\theta}{b't'}\right),$$

et

$$v_0 = -\log\left(1 - \frac{\theta}{t'}\right).$$

Donc ici la position correspondante de l'index divise la distance des origines des axes (z) et (θ) dans le rapport

$$\frac{u_0}{v_0} = -\frac{\log\left(1 - \frac{b\theta}{b't'}\right)}{\log\left(1 - \frac{\theta}{t'}\right)},$$

qui est variable, mais s'écarte fort peu cependant d'une valeur fixe qui s'obtient comme suit : la quantité $\frac{\theta}{t'}$ étant en pratique toujours assez petite pour que son carré soit négligeable, nous avons, en remplaçant les logarithmes par leurs développements de Taylor, limités aux termes du premier ordre,

$$\frac{u_0}{v_0} = -\frac{\frac{b\theta}{b't'}}{\frac{\theta}{t'}} = -\frac{b}{b'}.$$

Le point ainsi défini, qui divise la distance du point $z = o$ au point $\theta = o$ dans le rapport $\frac{b}{b'}$, sera, dans ce cas, pris comme point d'arrêt.

Le point d'arrêt étant ainsi obtenu dans tous les cas, on voit que la condition limitative correspondante se traduit par le fait pour l'index de rencontrer une parallèle aux axes, issue de ce point, que nous appellerons *barre d'arrêt* (et que nous tracerons en trait gras), tandis que la condition de renvoi au terme complémentaire se traduit par le fait pour l'index de rencontrer la droite qui joint le point d'arrêt au point $z = o$, droite que nous appellerons *barre de renvoi au terme complémentaire* (et que nous tracerons en trait interrompu).

92. *Résumé pratique.* — Nous donnons ci-joint (planche) les nomogrammes à points alignés construits avec les données suivantes :

$$b = 5^m, \quad b' = 6^m,50, \quad t = \frac{2}{3}, \quad t' = 1, \quad F = 0^m,5, \quad \varphi = 1^m,91$$

qui servent dans les projets de concours des élèves de l'École des Ponts et chaussées. Et, à ce propos, nous reprendrons, à un point de vue pratique, la règle, résultant du numéro précédent, qui a été appliquée pour la construction de ces nomogrammes.

Nomogramme du remblai : Entre deux axes parallèles réservés l'un aux cotes z, l'autre aux déclivités θ, on a tracé deux autres axes parallèles aux premiers et divisant respectivement leur intervalle à la moitié et au tiers à partir de l'axe (z).

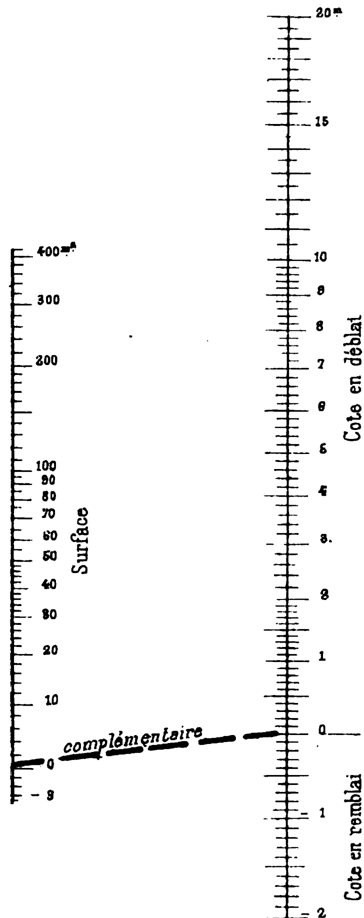
A partir d'un axe des origines, transverse aux précédents (et qui ne figure pas sur la planche), on a porté respectivement sur chacun d'eux les graduations (¹) :

Axe des cotes.....	$u = \log(3,33 - z)$	(de $z = -20$	à $z = 1,3$)
Axe des déclivités..	$v = -\log(6,66 + \theta)$	(de $p = -0,25$	à $p = 0,25$)
Axe des surfaces...	$w = \frac{\log(\sigma + 8,33) + \log 2}{3}$	(de $\sigma = -3$	à $\sigma = 700$)
Axe des emprises..	$w' = \frac{\log \varepsilon}{2}$	(de $\varepsilon = 5$	à $\varepsilon = 55$)
Axe des talus	$\varepsilon = 0,833\tau + 5$	(de $\tau = 0$	à $\tau = 60$)

(¹) Effectivement, il est inutile de tracer cet axe des origines. Il suffit de construire, sur chacun des axes parallèles, la graduation correspondante, entre les limites choisies, en ayant soin de placer sur un même alignement les points cotés

...CUL DES PROFIL...

...ENTAIRE



L. Courtier, 43, rue de Dunkerque, Paris

Le point d'arrêt se confond avec le point $\tau = 0$. La barre d'arrêt est la parallèle aux axes qui prolonge l'axe des τ en dessous de ce zéro. La barre de renvoi au terme complémentaire est la droite qui joint ce point $\tau = 0$ au point $z = 0$.

Nomogramme du déblai : Sur les axes choisis de même on a porté les graduations :

Axe des cotes.....	$u = \log(6,5 + z)$	(de $z = -2$ à $z = 20$)
Axe des déclivités..	$v = -\log(1 - \theta)$	(de $\theta = -0,25$ à $\theta = 0,25$)
Axe des surfaces...	$w = \dfrac{\log(\sigma' + 20,62) + \log 2}{3}$	(de $\sigma' = -2$ à $\sigma' = 400$)
Axe des emprises..	$w' = \dfrac{\log \varepsilon'}{3}$	(de $\varepsilon' = 6,5$ à $\varepsilon' = 35$)
Axe des talus.....	$\varepsilon' = 0,7071\,\tau' + 5,148$	(de $\tau' = 2$ à $\tau' = 40$)

Le point d'arrêt se trouve sur la droite qui joint le point $z = 0$ au point $\theta = 0$, et divise la distance de ces points dans le rapport de 5 à 6,5. La barre d'arrêt est la parallèle aux axes qui, partant de ce point, se dirige vers le bas des graduations ; la barre de renvoi au terme complémentaire, la droite qui joint ce point au point $z = 0$.

Nomogramme du terme complémentaire : Sur deux axes parallèles et sur l'axe qui en est équidistant on porte respectivement les graduations :

Axe des cotes........	$u = 2\log z$	(de $z = 0,1$ à $z = 1,3$)
Axe des déclivités....	$v = -\log \theta$	(de $\theta = 0,005$ à $\theta = 0,25$)
Axe de la surface complémentaire.........	$w = \dfrac{\log \gamma + \log 2}{2}$	(de $\gamma = 0,05$ à $\gamma = 100$)

Ce terme complémentaire est d'ailleurs indépendant des données spécifiques du projet.

---

qui se correspondent pour un système particulier de valeurs des données (par exemple : $z = 0$, $\theta = 0$). Pour construire une graduation logarithmique telle que $\log(a - z)$, il suffit de relever, sur un étalon logarithmique quelconque (échelle d'une règle à calcul ; axe tracé sur un quadrillage logarithmique à partir de son origine) les points $(a - z)$ correspondant aux diverses valeurs de z choisies. Pour des graduations logarithmiques de modules égaux à la moitié ou au tiers du module admis pour la première graduation (comme c'est ici le cas pour w' et pour w), on commence par relever ces graduations au moyen du même étalon, puis on les réduit à la moitié ou au tiers en les prenant comme bases de triangles que l'on recoupe par des parallèles à cette base à la moitié ou au tiers de la hauteur correspondante à partir du sommet opposé. Toutes ces constructions accessoires ont disparu de la planche ci-contre.

Mode d'emploi du Tableau formé par la réunion des trois nomogrammes : On fait passer l'index (fil tendu) par le point correspondant à la *cote* et le point correspondant à la *déclivité.* Cet index coupe les autres axes aux points qui font connaître la *surface,* l'*emprise* et le *talus.*

Lorsqu'on est dans un cas ordinaire, on n'a pas à hésiter entre le nomogramme du remblai et celui du déblai. Dans les cas mixtes on pourrait avoir une hésitation; elle est levée, *dans tous les cas,* par la condition que *l'index ne doit pas rencontrer la barre d'arrêt.*

Si l'index rencontre la barre de renvoi au terme complémentaire (toujours, bien entendu, sans rencontrer la barre d'arrêt), la surface du même nom que le nomogramme d'entrée est égale à la somme des lectures faites sur ce nomogramme et sur celui du terme complémentaire, la surface de nom contraire est égale à ce terme complémentaire.

Ce n'est d'ailleurs là que le commentaire du Tableau qui résume les quatre cas possibles à la fin du n° 81.

CHAPITRE VI.

COMPENSATION ET MOUVEMENT DES TERRES.

I. — Compensation des déblais et remblais.

93. *Compensation approchée sur le profil en long.* — On doit évidemment s'efforcer de faire en sorte que, sur toute l'étendue de la voie à construire, il y ait équivalence entre le cube total des déblais et celui des remblais, de façon à éviter les terrassements superflus : accumulation sous forme de *cavaliers de dépôt* des terres provenant des déblais en excédent, ou extraction hors des *chambres d'emprunt* des terres nécessaires à constituer les remblais en excédent ([1]).

Lorsque cette équivalence a lieu, on dit que les déblais et remblais sont *compensés*.

Ce n'est qu'une fois que le projet est terminé qu'on peut constater si cette compensation est réalisée. On peut toutefois observer certaines précautions pour l'assurer d'avance, au moins approximativement.

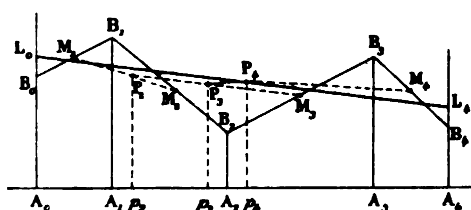
Les parties en déblai et en remblai étant, sur le profil en long, respectivement teintées en jaune et en rouge, on a un premier moyen d'établir approximativement la compensation *a priori* en traçant la ligne du projet à travers ce profil en long, de façon à laisser d'un

([1]) Il convient de remarquer que les terres provenant du déblai permettent tout d'abord de former un remblai de volume un peu supérieur à cause du foisonnement. Par la suite, en raison du tassement qui se produit, les terres reprennent sensiblement le volume qu'elles occupaient dans la fouille d'où elles ont été extraites. On admet ici qu'il y a équivalence entre les volumes occupés par la même masse de terre dans le déblai et dans le remblai une fois le tassement produit. S'il n'en était pas ainsi, si, par exemple, les remblais présentaient un foisonnement permanent, il y aurait, pour établir la compensation et, ultérieurement, pour étudier la répartition des déblais dans les remblais, à ne faire intervenir le volume des remblais que pour la part équivalente au volume des déblais d'où ils proviennent.

côté une somme d'aires teintées en jaune équivalente à la somme des aires teintées en rouge de l'autre côté. Cette équivalence des aires entraînerait une compensation exacte des volumes si les aires des profils en travers de déblai et de remblai étaient les mêmes pour une même valeur absolue de la cote sur l'axe, ce qui n'a pas lieu. Néanmoins, pour une première étude comme celle qui se fait dans l'avant-projet, cette approximation est suffisante.

On peut, d'ailleurs, obtenir rigoureusement cette équivalence des aires qui, sur le profil en long, correspondent respectivement aux déblais et aux remblais. Considérons, par exemple, le profil en long $B_0 B_1 B_2 B_3 B_4$ (*fig.* 121) et supposons que la ligne $L_0 L_4$ soit telle que

Fig. 121.



la somme des aires comprises entre le profil et cette ligne soit la même en dessus et en dessous d'elle. Il en résulte que l'aire du trapèze $A_0 L_0 L_4 A_4$ est équivalente à la somme des aires des trapèzes $A_0 B_0 B_1 A_1$, $A_1 B_1 B_2 A_2$, $A_2 B_2 B_3 A_3$ et $A_3 B_3 A_4 B_4$. Or on a

$$\text{Aire } A_0 L_0 L_4 A_4 = A_0 A_4 \times P_4 p_4,$$

p_4 étant le milieu de $A_0 A_4$. Il en résulte que la longueur de $P_4 p_4$ est déterminée et, par suite, aussi le point p_4. Il suffira de mener, par ce point une fois marqué, une droite quelconque $L_0 L_4$ (dont la pente sera tenue inférieure à la limite exigée par la nature de la voie à construire) pour qu'il y ait exacte compensation entre les aires laissées au-dessous et au-dessus de cette ligne.

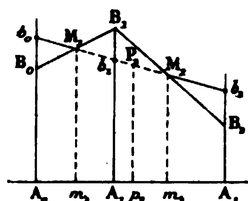
Pour cette raison le point P_4 est dit le *centre de compensation* du profil en long considéré.

Remarquons que si, au lieu de mener par ce centre une simple ligne droite, nous menions une ligne quelconque *symétrique par rapport à ce centre,* la compensation sur le profil en long serait encore obtenue.

94. *Construction du centre de compensation.* — M. l'Inspecteur général Collignon a fait connaître une ingénieuse construction de ce point ([1]), fondée sur le principe suivant :

Soient $A_0B_0B_1A_1$ et $A_1B_1B_2A_2$ deux trapèzes contigus (*fig.* 122).

Fig. 122.



Leur centre de compensation P_2 *se trouve à la rencontre de la droite joignant les milieux* M_1 *et* M_2 *de* B_0B_1 *et de* B_1B_2, *et de la perpendiculaire élevée à* A_0A_2 *en son milieu* p_2

La droite qui joint les milieux M_1 et M_2 est une ligne de compensation, car les triangles $M_1B_0b_0$ et $M_1B_1b_1$ sont équivalents, de même que $M_2B_1b_1$ et $M_2B_2b_2$. Donc le point de rencontre P_2 de cette ligne et de la perpendiculaire au milieu p_2 de A_0A_2 est le centre de compensation.

L'application de proche en proche de cette construction permet d'obtenir le centre de compensation d'une suite quelconque de trapèzes. Par exemple, pour en revenir à la figure 122, on n'a qu'à joindre le point P_2 au milieu M_3 de B_2B_3, et à prendre le point de rencontre P_3 de cette droite P_2M_3 avec la perpendiculaire élevée à A_0A_3 en son milieu p_3, puis à joindre P_3 au milieu M_4 de B_3B_4 et à prendre le point de rencontre P_4 de cette droite P_3M_4 avec la perpendiculaire élevée à A_0A_4 en son milieu p_4. Le point P_4 est le centre de compensation cherché.

95. *Comparaison entre les profils de déblai et de remblai.* — La compensation sur le profil en long, qui vient d'être exposée, ne serait exacte, avons-nous vu, que si à des cotes de même valeur absolue en remblai et en déblai correspondaient des aires de profils en travers équivalentes. Or, il n'en est pas ainsi. Cherchons à nous

([1]) *Annales des Ponts et Chaussées*, 1er sem. 1897. — C'est cette méthode de quadrature graphique qui a conduit M. Collignon au procédé d'évaluation des profils en travers, rattaché plus haut (n° 78) par voie d'homothétie au procédé de M. Garceau.

rendre compte de l'écart entre les aires de deux profils de nom contraire correspondant à une même valeur absolue de la cote z, en supposant, pour simplifier, la déclivité transversale θ du terrain naturel réduite à zéro, ce qui n'altère que de bien peu le résultat.

L'aire du profil en remblai est alors donnée, z représentant la *valeur absolue de la cote,* par

$$R = \frac{z^2}{t} + 2bz,$$

ainsi qu'on l'a vu précédemment (p. 162). De même l'aire du profil en déblai est donnée par

$$D = \frac{z^2}{t'} + 2b'z + 2F,$$

F étant l'aire de la section droite du fossé. On a donc

$$D - R = z^2\left(\frac{1}{t'} - \frac{1}{t}\right) + 2(b' - b)z + 2F.$$

Si, pour fixer les idées, nous reprenons pour les diverses constantes les mêmes valeurs que plus haut, savoir :

$$t = \frac{2}{3}, \qquad t' = 1 \qquad b = 5^m, \qquad b' = 6^m,50, \qquad F = 0^{mq},5,$$

nous avons

$$D - R = -\frac{1}{2}(z^2 - 12z - 2).$$

Le trinome entre parenthèses s'annule pour

$$z_1 = -0,1644 \quad \text{et} \quad z_2 = 12,1644.$$

Donc, puisque nous ne considérons ici que les valeurs absolues de z, nous voyons que, pour $z < 12,1644$, le trinome entre parenthèses étant négatif, D — R est positif.

Autrement dit, pour $z < 12^m$ environ, l'aire du déblai l'emporte sur celle du remblai à égalité de cote. Le maximum de D — R a d'ailleurs lieu pour la valeur de z qui annule la dérivée du trinome, soit $z = 6^m$. La valeur de ce maximum, obtenue en substituant cette valeur à z dans

$$D - R = -\frac{1}{2}[z^2 - 6z - (6z + 2)],$$

est donnée par

$$D - R = 3z + 1 = 19^{mq}.$$

Voyons de quelle quantité Δz il faudrait relever la ligne du projet pour amener l'équivalence entre les deux profils. On a, en négligeant les quantités du second ordre,

$$\Delta R = 2\left(\frac{z}{t} + b\right)\Delta z,$$

$$\Delta D = -2\left(\frac{z}{t'} + b'\right)\Delta z,$$

puisque le relèvement Δz a pour effet d'augmenter la cote de R et de diminuer celle de D.

Or, pour établir l'équivalence, on doit faire varier z d'une quantité Δz telle que

$$\Delta(R - D) = D - R$$

ou

$$2\left[z\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t'}\right) + b + b'\right]\Delta z = 19^{mq},$$

c'est-à-dire

$$53\,\Delta z = 19,$$

d'où

$$\Delta z = 0^{m},35.$$

Tel est donc le maximum de la quantité dont on peut avoir à relever la ligne du projet, correspondant à la compensation sur le profil en long, pour obtenir la compensation, exacte.

96. *Compensation* a posteriori. — Si, une fois la cubature de l'avant-projet terminée, on trouve un excédent de déblai ou de remblai que l'on juge trop considérable, on peut l'amoindrir dans le projet définitif en relevant ou abaissant d'une quantité convenable la ligne du projet.

D'après ce qui a été vu précédemment (p. 144), on a pour les volumes totaux V_D et V_R du déblai et du remblai, en utilisant les formules données à la page 161, et en représentant par l la longueur applicable à chaque profil en travers,

$$V_D = \sum\left[\frac{(a' + z)^2}{2(t' - \theta)} - c'\right]l,$$

$$V_R = \sum\left[\frac{(a - z)^2}{2(t + \theta)} - c\right]l.$$

Si donc on relève la ligne générale du projet de Δz, on a, en se bornant aux quantités du premier ordre,

$$\Delta V_D = -\sum \frac{a'+z}{t'-\theta} l \Delta z,$$

$$\Delta V_R = \sum \frac{a-z}{t+\theta} l \Delta z,$$

ou, en se reportant encore au même groupe de formules, et en désignant par ε et ε' les largeurs d'emprise,

$$\Delta V_D = -\sum \varepsilon' l \Delta z,$$

$$\Delta V_R = \sum \varepsilon l \Delta z,$$

ou, si E_D et E_R sont les aires totales d'emprise en déblai et en remblai,

$$\Delta V_D = -E_D \Delta z,$$

$$\Delta V_R = E_R \Delta z.$$

Il vient donc, si l'on appelle E la surface générale d'emprise, égale à $E_D + E_R$,

$$\Delta(V_R - V_D) = E \Delta z.$$

Or, pour amener la compensation, il faut précisément faire varier $V_R - V_D$ d'une quantité égale à la valeur trouvée pour la différence $V_D - V_R$ à la suite de la cubature de l'avant-projet. On doit donc poser

$$E \Delta z = V_D - V_R,$$

d'où

$$\Delta z = \frac{V_D - V_R}{E}.$$

Ainsi, *le relèvement qu'il faut donner à la ligne du projet pour assurer la compensation est sensiblement égal au quotient de l'excès des déblais sur les remblais par la surface générale d'emprise.*

Si les remblais l'emportent sur les déblais, Δz change de signe et indique un abaissement au lieu d'un relèvement de la ligne du projet.

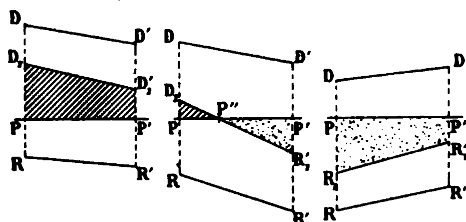
II. — Mouvement des terres.

97. *Cube réduit en vue du mouvement des terres.* — Lorsqu'on a définitivement arrêté les déblais et remblais destinés à l'établissement de la plate-forme de la voie, en s'efforçant, autant que possible, d'assurer la compensation, il s'agit de déterminer le *mouvement* de ces terres, c'est-à-dire de répartir rationnellement le long de la voie les terres extraites des déblais pour en constituer les remblais, en ayant en vue la plus grande économie possible ([1]).

Il convient tout d'abord de faire une remarque essentielle, à savoir que l'on doit, dans les parties mixtes, considérer que le volume du déblai est employé sur place, par un simple jet de pelle, à constituer le remblai contigu, de sorte que, dans un entreprofil mixte, l'excès du déblai sur le remblai constitue le déblai disponible pour le mouvement des terres ou, inversement, l'excès du remblai sur le déblai, le cube à apporter.

Afin de déterminer, dans un tel entreprofil, quel est le cube à faire intervenir dans le mouvement des terres, il suffit, ayant porté au droit des profils P et P′ (*fig.* 123, 123 *bis* et 123 *ter*) des ordonnées

Fig. 123, 123 *bis*, 123 *ter*.



PD, P′D′, proportionnelles aux aires du déblai, PR, P′R′, proportionnelles aux aires du remblai, de porter sur RD et R′D′, à partir de R et R′, des segments respectivement égaux à PD et P′D′. On obtient

([1]) On néglige ici toutes les considérations accessoires qui peuvent venir modifier le procédé rationnel que l'on va exposer. C'est ainsi que, dans le cas où les parties en déblai traversent des terrains d'une consistance impropre à la construction des remblais, il est préférable, pour la construction de ceux-ci, de recourir à des emprunts effectués dans des terrains de meilleure qualité, s'il s'en trouve à proximité. C'est aux ingénieurs de juger, dans chaque cas particulier, comment ils peuvent plier les principes théoriques ici développés aux circonstances qui s'offrent à eux.

ainsi, suivant le cas, un excédent de déblai (*fig.* 123) ou de remblai (*fig.* 123 *ter*) ou un excédent partie de déblai, partie de remblai (*fig.* 123 *bis*) faisant apparaître un point de passage fictif P″.

Dorénavant nous supposerons toujours, dans la représentation du déblai ou du remblai pour chaque entreprofil, que cette réduction à la partie intéressant le mouvement des terres a été opérée.

98. *Segments de répartition. Principe de la méthode de Bruckner.* — Pour juger plus aisément de la répartition des terres à enlever ou à rapporter tout le long de la voie on a recours à un autre mode de représentation qui consiste à porter en ordonnée au droit de chaque profil, et à partir d'une horizontale passant par l'origine du projet, les cubes cumulés à partir de cette origine jusqu'au profil considéré, en comptant *positivement* les volumes de *déblai, négativement* les volumes de *remblai* ([1]).

Si donc on considère (ce qui est très suffisant pour les besoins de la pratique) que le volume varie linéairement d'un profil à l'autre, les variations de ce volume sont représentées par la ligne polygonale qui joint les extrémités des ordonnées ainsi portées ([2]).

Soient, par exemple (*fig.* 124), p_0S_0, p_1S_1, p_2S_2... les ordonnées qui représentent, au droit de chaque profil, les aires correspondantes en déblai ou en remblai, réduites au besoin comme il vient d'être expliqué. A partir d'une nouvelle ligne de terre parallèle à la première portons des ordonnées P_1C_1, P_2C_2, P_3C_3..., égales aux cubes cumulés depuis l'origine jusqu'au profil considéré. Ainsi l'ordonnée P_1C_1 représente à une certaine échelle ([3]) le cube du déblai compris entre p_0 et p_1, c'est-à-dire l'aire du trapèze $p_0S_0S_1p_1$. A cette aire s'ajoute celle du trapèze $p_1S_1S_2p_2$, pour donner l'ordonnée P_2C_2, et

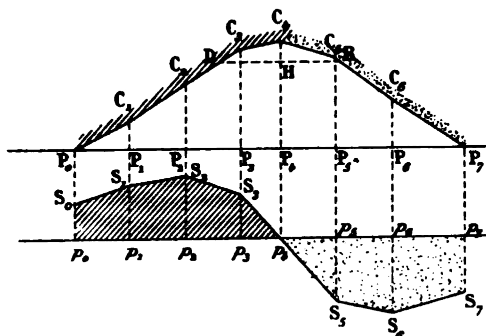
(1) Cette convention, plus conforme à la nature des choses, puisque les déblais se trouvent au-dessus, les remblais au-dessous de la plate-forme du projet, n'est pas observée par tous les auteurs. Il est donc utile, lorsqu'on se reporte à un travail relatif à la question, de s'assurer d'abord du sens adopté par l'auteur pour le report des cubes de déblai et de remblai.

(2) Plus exactement, si l'on joint par une ligne continue les extrémités des ordonnées représentant les aires des profils, la ligne représentant les variations du volume sera la *courbe intégrale* de la première et pourra être tracée au moyen d'un intégraphe. *Voir* à ce sujet l'Ouvrage de M. ABDANK-ABAKANOWICZ, *Les intégraphes*, p. 87.

(3) On sera libre de choisir cette échelle suivant le cas. Une échelle généralement commode consiste à prendre 4cm par hectomètre ($\frac{1}{2500}$) pour les longueurs portées en abscisses et 1mm par 100m³ pour les volumes portés en ordonnées.

ainsi de suite jusqu'au point de passage p_4, au-dessus duquel l'ordonnée P_4C_4 représente tout le déblai cumulé de p_0 à p_4. A partir de ce point, le remblai succédant au déblai, les aires de $p_4p_5S_5$, $p_5S_5S_6p_6$..., se retranchent successivement de l'ordonnée précédente pour donner P_5C_5, P_6C_6, jusqu'à ce qu'on arrive à une ordonnée p_7S_7 (coïncidant

Fig. 124.



ou non avec un des profils en travers effectivement relevés) qui donne à partir du point de passage p_4 un volume de remblai représenté par l'aire $p_4p_7S_7S_6S_5$, équivalant au volume de déblai compris entre p_0 et p_4. La ligne représentative des cubes cumulés depuis l'origine atteint alors de nouveau en P_7 la ligne de terre. Puisque dans l'intervalle de P_0 à P_7 le déblai et le remblai se compensent exactement, rendons-nous compte de la façon dont l'un pourra servir à constituer l'autre.

On commencera évidemment à attaquer les terres qu'il s'agit de déblayer au point de passage p_4 pour les rejeter en remblai au delà de ce point. Au fur et à mesure que le déblai s'ouvrira en s'éloignant de p_4, le remblai progressera en sens contraire et il est bien facile de déterminer les longueurs successives suivant lesquelles il y aura équivalence du déblai d'une part et du remblai de l'autre. Il suffit de mener une horizontale quelconque DR en la limitant au polygone représentatif des cubes cumulés. D'après le mode même de construction de ce polygone on voit que le volume de déblai compris entre l'ordonnée du point D et celle du point C_4 est égal au volume du remblai compris entre l'ordonnée du point C_4 et celle du point R, la valeur commune de ces deux volumes étant donnée, à l'échelle du dessin, par la portion HC_4 de l'ordonnée du point C_4 située au-dessus

de l'horizontale DR. Le déblai, représenté par le fragment DC_3C_4 de la ligne polygonale, servira donc à former le remblai représenté par le fragment C_4C_5R de la même ligne.

Cette propriété ayant lieu quelle que soit la position de l'horizontale DR à l'intérieur du segment $P_0C_4P_7$, on peut, en considérant deux positions très voisines de cette horizontale, dire que la portion très petite de déblai située à une extrémité de la bande horizontale ainsi formée, et égale à la hauteur de cette bande, est transportée à une distance égale à la longueur de cette bande pour fournir la portion très petite équivalente de remblai située à l'autre extrémité.

La répartition des terres à l'intérieur du segment considéré étant ainsi réalisée par des transports parallèles à l'axe P_0P_7, ce segment peut être appelé un *segment de répartition*. La droite P_0P_7 qui le ferme est dite la *ligne de répartition*. Quant à la ligne polygonale qui le limite d'autre part, elle sera dite la *ligne de Bruckner,* du nom de l'ingénieur qui a le premier proposé son emploi pour l'étude du mouvement des terres ([1]).

99. *Moment de transport. Distance moyenne.* — On vient de voir que chaque élément dy du volume des déblais était transporté à la distance $DR = x$ pour constituer un élément équivalent du remblai. Le prix de ce transport étant proportionnel au produit $x\,dy$, on voit que le prix total du mouvement des terres à l'intérieur du segment de répartition considéré sera représenté par l'intégrale $\int x\,dy$ étendue depuis l'axe des x jusqu'au point C. Or cette intégrale représente l'aire M du segment $P_0C_4P_7$. Cette aire est dite le *moment de transport* du mouvement des terres qui s'effectue dans ce segment.

([1]) Lalanne avait auparavant donné un procédé qui peut se rattacher à celui de Bruckner de la manière suivante : Ayant, au droit de chaque profil, élevé une ordonnée proportionnelle à la somme algébrique des cubes cumulés depuis l'origine, au lieu de joindre les extrémités de ces ordonnées par une ligne polygonale, on mène par chacune d'elles une horizontale jusqu'à l'ordonnée voisine. On obtient alors une ligne à gradins. Mais l'introduction de la ligne de Bruckner est incontestablement plus rationnelle et, tout en reconnaissant la part d'invention qui revient à Lalanne, il nous semble préférable de suivre la méthode de Bruckner. Sur les questions de détail que peut soulever son application on pourra consulter la *Note sur l'application de la méthode graphique au mouvement des terres* de M. l'ingénieur en chef Strohl, parue dans les *Annales des Ponts et Chaussées* (1er semestre 1884), et la brochure publiée par M. l'inspecteur général Henry, sous le titre de *Théorie et pratique du mouvement des terres d'après le procédé de Bruckner,* dans l'*Encyclopédie des Travaux publics*.

D'autre part le volume total des terres déplacées dans ce mouvement est donné par l'ordonnée $P_4C_4 = V$ du point le plus haut. La distance Δ définie par

$$M = V\Delta$$

est dite la *distance moyenne correspondante*. C'est la distance pour laquelle le cube total transporté en bloc donnerait lieu à la même dépense. On voit que cette distance Δ n'est autre que la base du rectangle de hauteur P_4C_4 qui serait équivalent au segment $P_0C_4P_7$.

Pour déterminer l'aire de ce segment il suffit de le décomposer en trapèzes par des horizontales menées par les divers sommets de la ligne de Bruckner. D'ailleurs, les portions de ces trapèzes situées de part et d'autre de l'ordonnée P_4C_4 pourront être sommées en un rectangle de côté P_4C_4 par le procédé de M. Collignon rappelé ci-dessus (n° 94), à propos de la détermination du centre de compensation.

Dans le cas où il y a lieu de distinguer entre plusieurs modes de transport, suivant qu'on reste ou non au-dessus d'une certaine limite, il est très facile de déterminer à part les moments de transport correspondants et, par suite, les distances moyennes.

Admettons, par exemple, comme cela se fait en pratique, que les transports sur une distance moindre que 90^m se fassent à la brouette, les autres jusqu'à 200^m s'effectuant au tombereau ([1]). Il suffira de couper le segment de répartition par une horizontale représentant, à l'échelle du dessin, une longueur de 90^m. Supposons que ce soit l'horizontale DR de la figure 124. L'aire de la portion du segment située au-dessus de cette horizontale fait alors connaître le moment des transports à la brouette, l'aire de la portion située au-dessous, le moment des transports au tombereau. Les distances moyennes correspondantes s'obtiendront en divisant ces moments respectivement par les cubes représentés par HC_4 et P_4H. Autrement dit, ce seront les bases des rectangles de hauteurs HC_4 et P_4H équivalents l'un à la portion DC_4R du segment, l'autre à la portion P_0DRP_7.

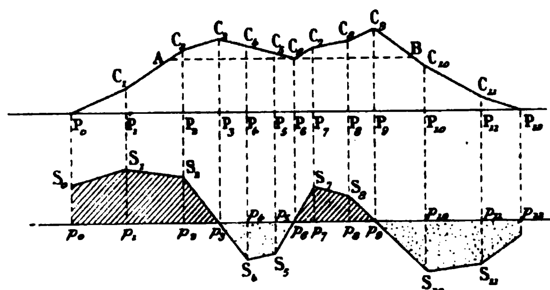
100. *Segments à partie rentrante.* — Nous avons supposé, pour construire la figure 124, qu'il y avait, à l'intérieur du segment de répartition, continuité des déblais d'une part, des remblais de l'autre.

([1]) En réalité, aujourd'hui, les transports de terres se font plus généralement par wagonnets traînés sur des voies Decauville.

Il en est ainsi le plus souvent, mais cela n'est nullement nécessaire. On rencontre parfois des dispositions comme celle de la figure 125 qui s'explique d'elle-même.

Dans ce cas il n'y a qu'à mener, par le point le plus bas C_6 de la partie rentrante, une parallèle AB à la ligne de répartition. On voit alors que la portion de déblai comprise entre les points A et C_3 fournira la portion de remblai équivalente comprise entre les points C_3 et C_6, le volume commun de ce déblai et de ce remblai étant donné par la portion de l'ordonnée du point C_3 comprise entre ce point et la ligne AB. De même le déblai de C_6 en C_9 donnera le remblai de C_9 en B. Quant au déblai de P_0 en A il fournira le remblai de B en P_{12},

Fig. 125.



le volume commun de ce déblai et de ce remblai étant donné par la cote de AB au-dessus de $P_0 P_{12}$.

Pour ce qui est de la détermination du moment de transport il n'y a rien à changer à ce qui a été dit précédemment. Il sera toujours représenté par l'aire totale du segment $P_0 C_3 C_6 C_9 P_{12}$. Mais il y aura lieu de distinguer entre les distances moyennes correspondant aux aires partielles $P_0 A B P_{12}$, $A C_3 C_6$ et $C_6 C_9 B$.

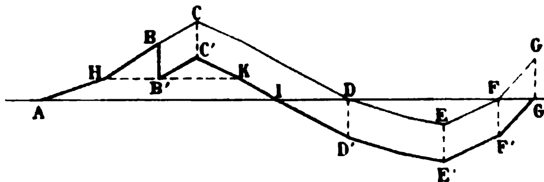
101. ***Répartition dans le cas général. Lieux de dépôt ou d'emprunt obligés.*** — Nous nous sommes bornés jusqu'ici à envisager un segment de répartition à l'intérieur duquel la compensation se fait exactement. Si la compensation est obtenue pour tout l'ensemble du projet, on trouvera une ligne de Bruckner oscillant autour de l'horizontale du point d'origine pour aboutir encore finalement sur cette ligne en formant de part et d'autre des segments de répartition à l'intérieur desquels on détermine, comme on vient de le voir, les moments de transport et distances moyennes.

Mais, s'il n'y a pas compensation générale d'un bout à l'autre du projet, la ligne de Bruckner se terminera, au droit du dernier profil, soit en dessus (s'il y a excès de déblai) soit en dessous (s'il y a excès de remblai) de l'horizontale du point d'origine. La distance du point terminal à cette horizontale mesurera d'ailleurs l'excédent du déblai ou du remblai, devant donner lieu à un dépôt ou à un emprunt équivalent.

On conçoit d'ailleurs que ce dépôt, ou cet emprunt, puisse s'effectuer en divers points choisis le long du projet. Si cet emplacement est, par suite de certaines circonstances, déterminé d'avance, on va voir que la répartition générale en résulte immédiatement.

Soit, pour fixer les idées, la ligne de Bruckner ABCDEFG (*fig.* 126)

Fig. 126.



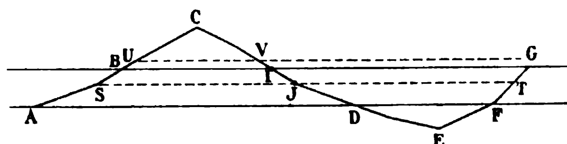
accusant de F en G un excédent de déblai dont le volume est mesuré par GG'. Supposons que le lieu obligé du dépôt se trouve au droit du profil du point B. La compensation sera rétablie moyennant le déversement en B d'un cube égal à GG'. Cette diminution, à partir du point B, du cube de déblai disponible se traduira sur l'épure par un abaissement brusque en ce point de la ligne de Bruckner, mesuré par BB' = GG'. La partie de cette ligne faisant suite au point B prendra donc la nouvelle position indiquée en trait fort du point B' au point G' où elle aboutira à l'horizontale du point A.

Cette ligne de Bruckner modifiée fait alors apparaître deux segments de répartition s'étendant l'un du point A au point I, l'autre du point I au point G'. Le premier présente un angle rentrant de sommet B'. Menant donc, suivant ce qui vient d'être dit, l'horizontale HK de ce sommet, on voit que les portions AH et B'C' de déblai donneront respectivement les portions KI et C'K de remblai, tandis que le déblai extrait de H en B fournira les terres mises en dépôt au droit du point B pour rétablir la compensation. Pour le surplus, le déblai de E' en G' sera mis en remblai de E' en I.

102. *Lieux de dépôt ou d'emprunt arbitraires. Limites de variation de la ligne de répartition.* — Si le lieu du dépôt, ou de l'emprunt, n'est pas obligé, on peut le faire varier en changeant de ligne de répartition. Pour en revenir à l'exemple précédent, nous avons vu (*fig.* 127) qu'en prenant comme ligne de répartition l'horizontale du point A nous mettions en évidence de F à G un excès de déblai donnant naissance à un dépôt dont le volume est mesuré par la distance du point G à l'horizontale AF, la répartition ayant lieu d'une part à l'intérieur du segment ACD, de l'autre à l'intérieur du segment DEF.

Mais nous aurions pu tout aussi bien prendre comme ligne de répartition l'horizontale de la seconde extrémité G du projet. Dans

Fig. 127.



ce cas, nous aurions eu une exacte répartition respectivement à l'intérieur des segments BCI et IEG, avec un excédent de déblai entre A et B d'un volume encore égal, comme de raison, à l'écartement entre les horizontales AF et BG. Le cube total des terrassements restant le même, la différence de ce cas au précédent consiste en ce que le dépôt servant à réunir la portion de déblai en excédent est reporté d'une extrémité à l'autre du projet.

Rien ne nous empêche d'ailleurs de choisir une autre ligne de répartition, par exemple l'horizontale ST comprise entre celles qui sont menées par les deux points extrêmes. Nous avons alors exacte compensation à l'intérieur des segments SCJ et JET, avec deux dépôts l'un pour le déblai de A en S, l'autre pour celui de T en G, dont, par suite, les volumes respectifs sont mesurés l'un par la distance entre les horizontales ST et AF, l'autre par la distance entre les horizontales ST et BG, ce qui donne bien encore pour leur somme la distance entre les horizontales AF et BG.

Mais, si nous prenions une ligne de répartition *extérieure* aux horizontales extrêmes AF et BG, nous voyons que, la compensation exacte ayant lieu cette fois respectivement à l'intérieur des segments UCV et IEG, nous aurions non seulement de A en B un déblai four-

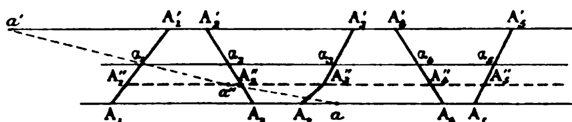
nissant le dépôt obligé par la nature du projet et mesuré par l'écartement des horizontales AF et BG, mais encore un dépôt supplémentaire correspondant au déblai de B en U, et un emprunt supplémentaire de V en I, mesurés l'un et l'autre par l'écartement des horizontales UV et BI. Il est clair que l'on augmenterait la masse des terrassements en ajoutant à ceux que comporte nécessairement le projet ceux qui correspondent à ce dépôt et à cet emprunt supplémentaires d'ailleurs équivalents.

La conclusion qui découle de là est que la ligne de répartition doit être nécessairement choisie à l'intérieur de la bande limitée par les horizontales des points extrêmes de la ligne de Bruckner et que nous appellerons pour cette raison la *bande utile*. Nous allons maintenant chercher, entre ces limites, la position la plus favorable de la ligne de répartition, c'est-à-dire celle qui correspond au minimum de frais de terrassements.

103. *Ligne de répartition la plus favorable*. — Puisque cette ligne doit, ainsi qu'on vient de le voir, se trouver à l'intérieur de la bande utile, nous pouvons nous borner à ne considérer que la portion de l'épure intérieure à cette bande (*fig.* 128).

Appelons x_1, x_2, x_3... les segments d'une horizontale quelconque

Fig. 128.



qui sont compris respectivement entre $A_1A'_1$ et $A_2A'_2$, $A_2A'_2$ et $A_3A'_3$, $A_3A'_3$ et $A_4A'_4$, ...

Cette horizontale détermine avec la ligne de Bruckner des segments de répartition dont les aires seront désignées par σ_1, σ_2, σ_3....

Remarquons que, si l'on élève l'horizontale choisie, certaines de ces aires diminuent tandis que les autres augmentent. Par exemple, sur la figure 128, les aires σ_2, σ_4, ... augmentent tandis que σ_1, σ_3, ... diminuent, et, si l'on représente par σ l'aire totale, savoir

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots,$$

qui mesure le moment de transport total, on a

$$d\sigma = d\sigma_2 + d\sigma_4 + \ldots - (d\sigma_1 + d\sigma_3 + \ldots),$$

ou

$$d\sigma = dy[x_2 + x_4 + \ldots - (x_1 + x_3 + \ldots)].$$

L'aire σ (et, par suite, le moment de transport total) étant minimum lorsque sa différentielle est nulle, il en résulte que ce minimum est donné par l'horizontale pour laquelle

$$x_2 + x_4 + \ldots - (x_1 + x_3 + \ldots) = 0.$$

Si cette horizontale se trouve à l'intérieur de la bande utile, ce qui est généralement le cas, *c'est donc elle qui fournira la position la plus favorable de la ligne de répartition.*

Il est d'ailleurs facile de déterminer cette horizontale sur laquelle la somme algébrique des segments alternés, compris entre les diverses portions de la ligne de Bruckner, est nulle.

Si, en effet, à partir du premier élément $A_1A'_1$ de cette ligne, on porte sur chaque horizontale un segment, dit *segment sommatoire,* égal à la somme algébrique des segments de cette horizontale, alternativement affectés du signe + ou —, on obtient comme lieu de la seconde extrémité de ce segment sommatoire une droite qui change de direction lorsque l'horizontale passe par un sommet de la ligne de Bruckner. Sur la figure 128 cela n'a lieu que pour l'horizontale qui passe par le sommet A''_3. Si donc, sur les horizontales extrêmes d'une part, sur celles qui correspondent aux sommets intermédiaires du polygone de Bruckner d'autre part, on porte les segments sommatoires correspondants, la ligne brisée obtenue en joignant les extrémités de ces segments que nous appellerons *ligne sommatoire* (et qui se réduira souvent à une seule ligne droite) fera connaître les variations de la somme $[x_2 + x_4 + \ldots - (x_1 + x_3 + \ldots)]$ sur toute la hauteur de la bande utile.

Sur la figure 128 cette ligne sommatoire se compose des deux droites aa'' et $a''a'$. Lorsque, comme c'est le cas sur cette figure, elle rencontre le premier élément $A_1A'_1$ de la ligne de Bruckner en un point α_1 situé dans la bande utile, c'est-à-dire entre A_1 et A'_1, l'horizontale de ce point fait connaître la position la plus favorable cherchée pour la ligne de répartition.

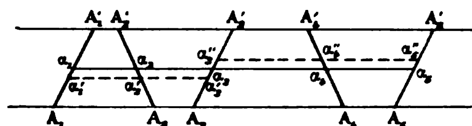
Si le point α_1 se trouve en dehors de la bande utile, on prendra l'horizontale de cette bande la plus voisine de celle qui correspondrait au minimum absolu, c'est-à-dire celui des bords de cette bande utile qui se trouve du côté du point α_1. On voit, en effet, puisque la varia-

tion de l'aire σ est *linéaire* et, par suite, toujours de même sens à partir du minimum de cette aire, qu'une horizontale donne une aire σ d'autant plus petite qu'elle est plus voisine de celle qui correspond au minimum absolu.

104. *Ligne de répartition en gradins.* — Nous avons supposé jusqu'ici qu'on adoptait une ligne de répartition unique sur toute la longueur du projet. Or, il peut, en certains cas, être plus avantageux de ne pas procéder ainsi et d'adopter, sur cette longueur totale, plusieurs lignes de répartition de cotes différentes, formant alors des gradins.

Soit, par exemple, $\alpha_1 \alpha_5$ (*fig.* 129) la ligne de répartition *unique*

Fig. 129.

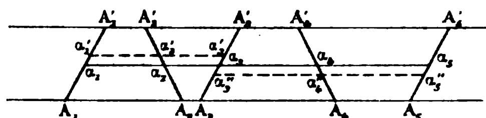


correspondant au minimum, et qui a été déterminée comme il vient d'être dit. Si, pour les deux premiers segments, on substitue à la ligne $\alpha_1 \alpha_3$ la ligne $\alpha'_1 \alpha'_3$ telle que $\alpha'_1 \alpha'_2 = \alpha'_2 \alpha'_3$, on obtient une diminution sur la somme $\sigma_1 + \sigma_2$ en vertu de la remarque faite ci-dessus. De même la substitution à la ligne $\alpha_3 \alpha_5$ de la ligne $\alpha''_3 \alpha''_5$, telle que $\alpha''_3 \alpha''_4 = \alpha''_4 \alpha''_5$, assure encore une diminution sur la somme $\sigma_3 + \sigma_4$. Finalement, en remplaçant la ligne de répartition unique $\alpha_1 \alpha_5$ par les deux lignes $\alpha'_1 \alpha'_3$ et $\alpha''_3 \alpha''_5$, formant gradins, on diminue l'aire totale σ et, par suite, les frais de transport des terres. Cette substitution ne change d'ailleurs pas le cube total des terrassements. Elle a simplement pour effet de remplacer les dépôts antérieur au point α_1 et postérieur au point α_5, que faisait apparaître la ligne $\alpha_1 \alpha_5$, par des dépôts antérieur au point α'_1 et postérieur au point α''_5, plus un dépôt situé entre les points α'_3 et α''_3, le cube total de ces divers dépôts étant le même dans les deux cas et égal à la hauteur de la bande utile.

Mais il est essentiel de remarquer que ce remplacement de la ligne de répartition unique par une ligne à gradins n'est pas toujours possible.

Par exemple, dans le cas de la figure 130, les lignes $\alpha'_1\alpha'_3$ et $\alpha''_3\alpha''_5$, définies exactement comme dans le cas précédent, ne sauraient être admises parce qu'avec cette disposition la portion de déblai située entre α''_3 et α_3 devrait fournir à la fois les deux remblais équivalents

Fig. 130.



situés l'un au-dessous de α'_2 sur $A_2A'_2$, l'autre au-dessus de α''_1 sur $A_1A'_1$.

On peut, pour juger de cette impossibilité, considérer les deux parties de la ligne de Bruckner, auxquelles correspondent les deux lignes de répartition en gradin successives, comme soudées au point α_3. Il faut dès lors que chaque ligne partielle se trouve à l'intérieur de la bande utile correspondante. Pour la première partie, cette bande est comprise entre l'horizontale A_1A_3 du point de départ A_1 et l'horizontale $\alpha_1\alpha_3$ du point d'arrivée α_3; pour la seconde, elle est comprise entre l'horizontale $\alpha_3\alpha_5$ du point de départ α_3 et l'horizontale $A'_3A'_5$ du point d'arrivée A'_5.

Dans le cas de la figure 129, les lignes partielles $\alpha'_1\alpha'_3$ et $\alpha''_3\alpha''_5$ sont bien à l'intérieur de ces bandes utiles partielles, tandis que dans le cas de la figure 130 elles seraient à l'extérieur, d'où l'impossibilité constatée dans ce dernier cas.

ANNEXE.

NOTIONS SOMMAIRES DE NOMOGRAPHIE (¹).

105. *Principe général de la représentation nomographique des équations à trois variables.* — Si les équations

$$(\alpha_1) \qquad F_1(x, y, \alpha_1) = 0,$$
$$(\alpha_2) \qquad F_2(x, y, \alpha_2) = 0,$$
$$(\alpha_3) \qquad F_3(x, y, \alpha_3) = 0$$

définissent trois systèmes de lignes (α_1), (α_2), (α_3), cotées au moyen des valeurs du paramètre correspondant, les cotes de trois de ces lignes concourant en un même point satisfont à l'équation

$$(E) \qquad \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$$

obtenue par l'élimination de x et y entre les trois précédentes. L'ensemble des trois systèmes cotés (α_1), (α_2), (α_3), (*fig.* 131) constitue donc une représentation graphique de l'équation (E). Cet ensemble est dit un *abaque* ou *nomogramme à entrecroisement* de cette équation.

Étant donnée l'équation (E) on peut choisir arbitrairement deux des trois systèmes, (α_1) et (α_2) par exemple; l'équation du troisième (α_3) s'obtient, en effet, par la simple élimination de α_1 et α_2 entre les

(¹) Pour plus de détails, se reporter au *Traité de Nomographie* de l'auteur, déjà cité et désigné ici par les lettres *T. de N.*, ainsi qu'à son Mémoire plus récent : *Exposé synthétique des principes fondamentaux de la Nomographie*, désigné par les lettres *E. S.*

équations (α_1), (α_2) et (E). Il faut toutefois que le résultat de cette élimination donne des lignes *réelles*. On dit alors que l'on a *disjoint* les variables α_1, α_2 et α_3 de l'équation (E).

On peut toujours, pour opérer cette disjonction, prendre pour (α_1) et (α_2) les équations

$$(\alpha_1) \qquad x - \alpha_1 = 0,$$

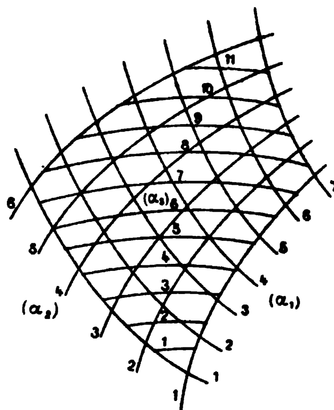
$$(\alpha_2) \qquad y - \alpha_2 = 0.$$

L'équation (α_3) est alors

$$(\alpha_3) \qquad \Phi(x, y, \alpha_3) = 0,$$

et, si, comme c'est l'habitude, on fait croître les cotes α_1, α_2, α_3 par

Fig. 131.



valeurs rondes, on obtient la disposition d'abaque représentée par la figure 132 ([1]), désignée, en raison de la forme donnée dans ce cas aux équations (α_1) et (α_2), sous le nom d'*abaque cartésien*.

Mais, en vue d'avoir à construire des courbes plus simples, on

([1]) C'est de cette disposition en damier (ἄβαξ) qu'est venu le terme d'*abaque* dont l'emploi s'est généralisé depuis lors pour toute espèce de tableau graphique coté, indépendamment de cette disposition particulière (*T. de N.*). Ainsi qu'il arrive souvent en pareille matière, l'usage n'a pas eu en cela souci de la logique de l'étymologie. Le terme de *Nomographie* étant définitivement consacré par l'usage, M. Schilling, Professeur à l'Université de Göttingen, a proposé de donner aux tableaux graphiques cotés en général le nom de *nomogramme*, en ne conservant celui d'abaque que pour ceux, en disposition de damier, auxquels il s'appliquait primitivement. Nous nous sommes rallié pour notre part à cette proposition.

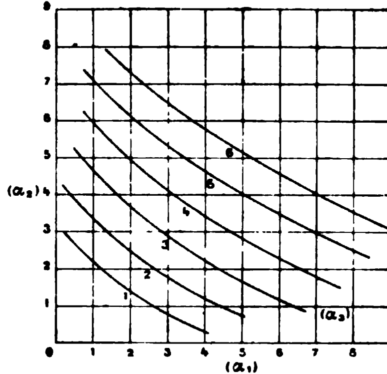
pourra, le cas échéant, recourir à un autre mode de disjonction des variables.

Soit, par exemple, l'équation

$$k^2 + kp \sin\varphi \cos\varphi - \frac{p}{3} \cos^2\varphi = 0,$$

dans laquelle k représente le rapport de la base à hauteur d'un mur

Fig. 132.



de soutènement à section rectangulaire, p le rapport du poids spécifique de la terre soutenue à celui de la maçonnerie du mur, φ l'angle naturel de cette terre ([1]). Son abaque cartésien obtenu en posant

$$x = k, \qquad y = p,$$

comportera le tracé des hyperboles

$$x^2 + xy \sin\varphi \cos\varphi - \frac{y}{3} \cos^2\varphi = 0.$$

Or, la disjonction des variables de cette équation peut s'opérer au moyen des équations

$$(k) \qquad \frac{x}{3} - ky - k^2 = 0,$$

$$(p) \qquad x^2 + y^2 - px = 0,$$

$$(\varphi) \qquad y - x \operatorname{tang}\varphi = 0,$$

dont la première et la troisième représentent des droites et la

([1]) Voir COLLIGNON, *Résistance des matériaux*, 3e édition, p. 669.

deuxième des cercles passant par l'origine et ayant leur centre sur Ox; et le tracé de ces cercles est immédiat alors que les hyperboles de l'abaque cartésien devraient être construites point par point. La

Fig. 133.

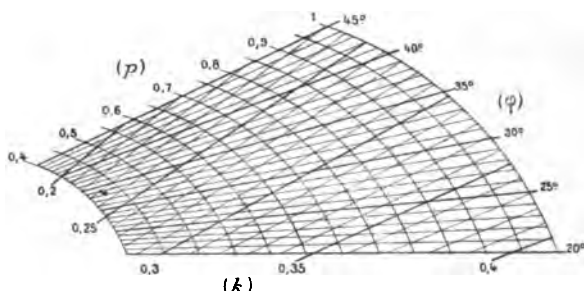


figure 133 montre cet abaque à droites et cercles ([1]) réduit à sa portion utile, vu les valeurs pratiques de p et φ.

106. *Abaques à droites entrecroisées. Anamorphose.* — Le cas le plus intéressant, en raison de la simplicité de la construction de l'abaque correspondant et aussi de l'extrême fréquence avec laquelle il se rencontre dans la pratique, est celui où les trois systèmes (α_1), (α_2) et (α_3) sont des systèmes de droites.

Si alors les équations de ces trois systèmes sont

$$(\alpha_1)_1 \qquad x f_1(\alpha_1) + y\,\varphi_1(\alpha_1) + \psi_1(\alpha_1) = 0,$$

$$(\alpha_2)_1 \qquad x f_2(\alpha_2) + y\,\varphi_2(\alpha_2) + \psi_2(\alpha_2) = 0,$$

$$(\alpha_3)_1 \qquad x f_3(\alpha_3) + y\,\varphi_3(\alpha_3) + \psi_3(\alpha_3) = 0,$$

l'équation représentée, obtenue par l'élimination de x et y, peut s'écrire (si l'on se contente de désigner les fonctions des diverses variables par l'indice correspondant)

$$(\mathrm{E})_1 \qquad \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Parmi les équations susceptibles de prendre cette forme, les plus

([1]) Pour la théorie des abaques à cercles, voir : *T. de N.*, p. 113 et *E. S.*, p. 18. Pour la construction de l'abaque particulier donné ici en exemple, voir : *T. de N.*, p. 115.

fréquentes dans les applications appartiennent soit au type

$$(E)_2 \qquad f_1 f_2 + \varphi_2 \varphi_3 + \psi_3 = 0,$$

pour lequel les systèmes (α_1), (α_2) et (α_3) sont

$$(\alpha_1)_2 \qquad x - f_1 = 0.$$

$$(\alpha_2)_2 \qquad y - \varphi_2 = 0,$$

$$(\alpha_3)_2 \qquad x f_3 + y \varphi_3 + \psi_3 = 0,$$

soit au type plus particulier encore

$$(E)_3 \qquad f_1 + f_2 = f_3,$$

pour lequel on prend

$$(\alpha_1)_3 \qquad x - f_1 = 0,$$

$$(\alpha_2)_3 \qquad y - f_2 = 0.$$

$$(\alpha_3)_3 \qquad x + y - f_3 = 0.$$

La représentation par des abaques à lignes droites des équations des types $(E)_2$ et $(E)_3$ est due à Lalanne (¹), qui a donné à la transformation qui rattache ces abaques aux abaques cartésiens définis ci-dessus le nom d'*anamorphose*. Comme exemple du type $(E)_3$ on peut citer les équations rencontrées précédemment (nº 87) qui font connaître l'aire σ d'un profil en travers et la largeur d'emprise ε en fonction de la cote z et de la déclivité θ. Les abaques de ces deux équations, construits avec les mêmes systèmes de lignes (z) et (θ), se trouvent superposés sur la figure 114 (p. 170).

C'est en cherchant à généraliser l'anamorphose de Lalanne que M. Massau a rencontré le type $(E)_1$ ci-dessus (²).

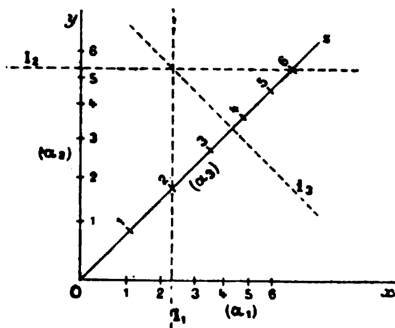
107. *Transparent à trois index. Abaques hexagonaux.* — Dans le cas très particulier, mais très fréquent en pratique, où l'équation représentée revêt la forme $(E)_3$, les trois systèmes de droites $(\alpha_1)_3$, $(\alpha_2)_3$, $(\alpha_3)_3$, sont composés de droites parallèles. On peut donc se dispenser de tracer ces trois systèmes de parallèles en conservant les échelles perpendiculaires à leurs directions respectives pourvu que l'on dispose d'un transparent, d'orientation constante, portant trois

(¹) *Mémoire sur les Tables graphiques et sur la Géométrie anamorphique* (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1er semestre 1846).

(²) *Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications* (*Annales de l'Association des Ingénieurs sortis des Écoles spéciales de Gand*, 1884).

index concourants, respectivement parallèles aux directions des trois systèmes supprimés. On obtient ainsi le type de nomogramme repré-

Fig. 134.



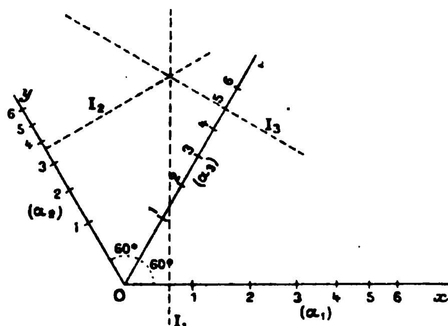
senté par la figure 134 où les index I_1, I_2, I_3 du transparent mobile sont marqués en pointillé (1).

On voit que les échelles portées sur Ox, Oy et Oz sont respectivement définies par

$$x = f_1, \qquad y = f_2, \qquad z = \frac{f_3}{\sqrt{2}}.$$

Si, tout en maintenant les index normalement aux échelles, on

Fig. 135.



incline les échelles Ox et Oy à 60°, au lieu de 45°, de part et d'autre de Oz, on obtient la disposition de la figure 135 pour laquelle

(1) Cette transformation a été proposée pour les abaques des déblais et remblais de Lalanne par M. Blum (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1er semestre 1881).

on a

$$x = f_1, \quad y = f_2, \quad z = f_3.$$

On obtient ainsi le type des *abaques hexagonaux* imaginés par M. Lallemand ([1]) et dont on a donné plus haut (n° 89) le principe sous une forme plus élémentaire en vue de leur application au calcul des profils en travers.

108. *Nomogrammes à alignement.* — L'entrecroisement de trois systèmes de lignes (α_1), (α_2), (α_3) peut entraîner une certaine confusion dans la lecture des cotes, confusion qui ne saurait être évitée que si, sur l'abaque considéré, *chaque cote ne s'applique qu'à un seul point* au lieu de s'étendre à toute une ligne.

L'emploi du transparent permet de satisfaire à cette condition dans le cas particulier du type $(E)_3$. Voici, pour les équations du type $(E)_1$ le plus général, un principe ([2]) qui permet de réaliser le même desideratum, et par un moyen beaucoup plus simple, puisqu'il n'y a plus ici qu'un index au lieu de trois et point de sujétion d'orientation.

Il suffit, pour énoncer ce principe dans toute sa généralité, de remarquer que l'équation $(E)_1$ ci-dessus exprime l'alignement des trois points

$[\alpha_1]$ $$x = \frac{f_1}{\psi_1}, \quad y = \frac{\varphi_1}{\psi_1},$$

$[\alpha_2]$ $$x = \frac{f_2}{\psi_2}, \quad y = \frac{\varphi_2}{\psi_2},$$

$[\alpha_3]$ $$x = \frac{f_3}{\psi_3}, \quad y = \frac{\varphi_3}{\psi_3},$$

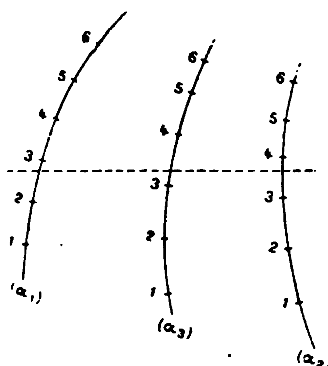
puisque, par variation des paramètres α_1, α_2, α_3 correspondants, ces trois points engendrent des lignes graduées $[\alpha_1]$, $[\alpha_2]$, $[\alpha_3]$. On obtient ainsi le type de nomogramme représenté d'une manière absolument générale par la figure 136.

([1]) *Comptes rendus*, 1er semestre 1886, p. 816.

([2]) Énoncé pour la première fois, à l'occasion d'une application particulière, dans une Note intitulée : *Procédé nouveau de calcul graphique* (*Annales des Ponts et Chaussées*, 2e semestre 1884, p. 531), puis, sous une forme générale, dans une Note intitulée : *Méthode de calcul graphique fondée sur l'emploi des coordonnées parallèles* (*Génie civil*, 1890, p. 343). Ce principe a été développé depuis lors dans le Chapitre IV de la brochure : *Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques* (1891), dans le Chapitre III du *T. de N.* (1899), et dans *E. S.*, p. 40.

On peut d'ailleurs appliquer à cet ensemble de points la transfor-

Fig. 136.



mation homographique la plus générale en posant

$$[\alpha_1]' \qquad x = \frac{\lambda f_1 + \mu\varphi_1 + \nu\psi_1}{\lambda'' f_1 + \mu''\varphi_1 + \nu''\psi_1}, \qquad y = \frac{\lambda' f_1 + \mu'\varphi_1 + \nu'\psi_1}{\lambda'' f_1 + \mu''\varphi_1 + \nu''\psi_1},$$

$$[\alpha_2]' \qquad x = \frac{\lambda f_2 + \mu\varphi_2 + \nu\psi_2}{\lambda'' f_2 + \mu''\varphi_2 + \nu''\psi_2}, \qquad y = \frac{\lambda' f_2 + \mu'\varphi_2 + \nu'\psi_2}{\lambda'' f_2 + \mu''\varphi_2 + \nu''\psi_2},$$

$$[\alpha_3]' \qquad x = \frac{\lambda f_3 + \mu\varphi_3 + \nu\psi_3}{\lambda'' f_3 + \mu''\varphi_3 + \nu''\psi_3}, \qquad y = \frac{\lambda' f_3 + \mu'\varphi_3 + \nu'\psi_3}{\lambda'' f_3 + \mu''\varphi_3 + \nu''\psi_3}.$$

les paramètres λ, μ, ν étant quelconques mais tels pourtant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. La transformation revient, en effet, au point de vue analytique, à la multiplication par ce déterminant de celui qui constitue le premier membre de l'équation $(E)_1$.

A titre d'exemple, voici une équation qui se rencontre dans la théorie des murs de soutènement : soient ABCD et MBCN (*fig.* 137) les sections rectangulaire et trapézoïdale de deux murs de soutènement de même hauteur et de même résistance. Si l'on pose

$$\frac{BM}{BA} = l, \qquad \frac{AP}{AD} = h,$$

et si l'on appelle p le rapport du poids spécifique de la terre soutenue

à celui de la maçonnerie, on a

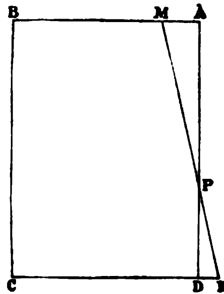
$$(1+l)h^2 - l(1+p)h - \frac{(1-l)(1+2p)}{3} = 0,$$

en remarquant que cette équation peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} 2(l^2-1) & 3l(l+1) & -l(l-1) \\ 2(2p+1) & 3(p+1) & -(p+1)(2p+1) \\ h & 1 & -h^2 \end{vmatrix} = 0,$$

et prenant des valeurs convenables pour les λ, μ, ν on obtient le

Fig. 137.



nomogramme de la figure 138 ([1]).

Pour le type $(E)_2$, il suffit de prendre, l désignant une longueur quelconque ([2]),

$[\alpha_1]_2$	$x = -l,$	$y = f_1,$
$[\alpha_2]_2$	$x = l,$	$y = \varphi_2,$
$[\alpha_3]_2$	$x = l\dfrac{\varphi_3 - f_3}{\varphi_3 + f_3},$	$y = \dfrac{\psi_3}{\varphi_3 + f_3}.$

([1]) Pour le détail de la construction de ce nomogramme voir : *T. de N.*, p. 198.

([2]) Aux exemples donnés dans le *T. de N.* (Chap. III, Sect. II et III) pour les équations de ce type et du suivant, qui se rencontrent à chaque pas dans la pratique, il convient de joindre ceux, très nombreux et fort intéressants pour les ingénieurs, que l'on trouve dans un important Mémoire de M. Soreau paru en août 1901 dans le *Bulletin de la Société des Ingénieurs civils*. L'extrême multiplicité des applications de la méthode des points alignés ayant attesté sa valeur pratique, le capitaine d'artillerie Lafay qui a, pour sa part, fait connaître plusieurs de ces applications, et non des moins importantes, a donné un procédé pratique pour mettre approximativement, entre les limites fixées à la variation des variables, une équation *quelconque* à trois variables sous la forme $(E)_2$ ou $(E)_3$ (*Revue d'Artillerie*, 1901, et *Génie civil*, 1902).

Pour le type $(E)_3$, ou un peu plus généralement

$$pf_1 + qf_2 = f_3,$$

on prend de même

$$[\alpha_1]_3 \qquad x = -l, \qquad y = f_1,$$
$$[\alpha_2]_3 \qquad x = l, \qquad y = f_2,$$
$$[\alpha_3]_3 \qquad x = l\frac{q-p}{q+p}, \qquad y = \frac{f_3}{p+q}.$$

On retrouve ainsi le type de nomogramme défini au n° **91** par un

Fig. 138.



procédé élémentaire, en vue de son application au calcul des profils en travers.

109. *Échelles binaires.* — Pour obtenir la représentation d'équations à plus de trois variables, la première idée qui se présente consiste à substituer, dans un des types de nomogrammes précédents, des éléments à deux cotes aux éléments à une seule cote qui y interviennent.

On peut d'abord, s'il s'agit, comme éléments cotés, des points d'une échelle rectiligne, recourir à l'artifice suivant, qui a été proposé par M. E. Prévot pour les abaques hexagonaux :

Si l'on accole au support de l'échelle pris pour axe Ox (*fig.* 139) les deux systèmes de courbes, définis par

$$f(x, y, \alpha) = 0,$$
$$\varphi(x, y, \beta) = 0,$$

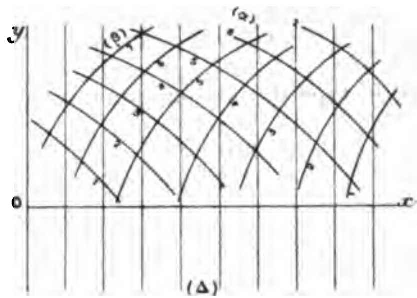
on voit que la parallèle à Oy passant par le point de rencontre d'une

courbe (α) et d'une courbe (β) donnera sur Ox un segment dont la valeur

$$x = \psi(\alpha, \beta)$$

s'obtiendra par l'élimination de y entre les équations précédentes.

Fig. 139.



L'axe Ox muni du réseau des courbes (α) et (β) constitue alors ce qu'on appelle une *échelle binaire de la fonction* ψ (α, β).

Voici, à titre d'application, un abaque hexagonal à échelle binaire (*fig.* 140) construit pour la formule de M. Boussinesq relative à la poussée des terres [1],

$$P = \varpi \frac{H^2}{2} \frac{\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left[\varphi_1 - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right]},$$

dans laquelle

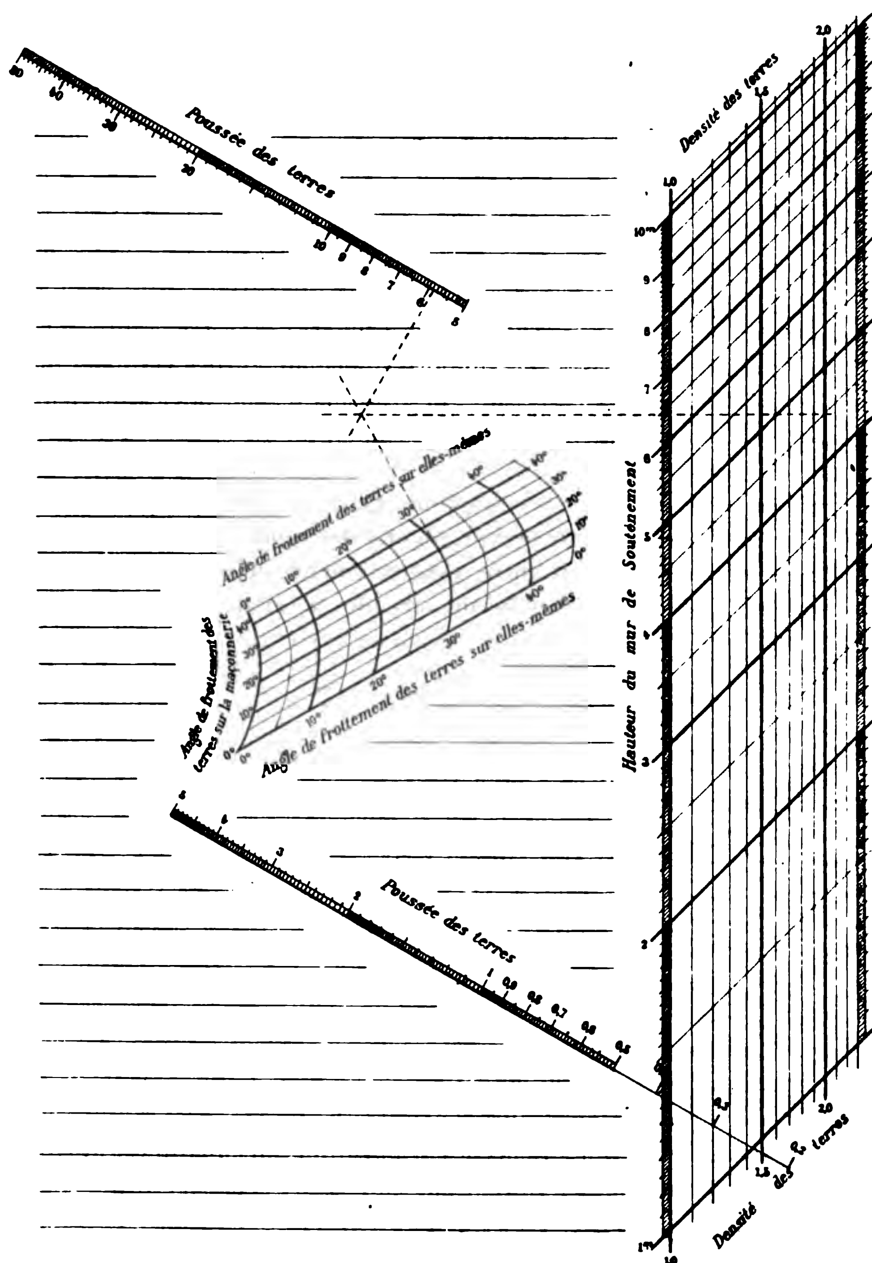
φ désigne l'angle de frottement des terres sur elles-mêmes,
φ_1 l'angle de frottement des terres sur la maçonnerie,
ϖ le poids en tonne du mètre cube de terre,
H la hauteur en mètres du mur,
P la poussée en tonnes par mètre carré.

Pour la construction de cet abaque on a mis la formule sous la forme logarithmique, et l'on a groupé dans une échelle binaire d'une part les termes en φ et φ_1, de l'autre les termes en H et ϖ.

En outre, les échelles d'un abaque hexagonal pouvant être déplacées à volonté parallèlement à la direction des index correspondants, on

(1) Pour le détail de la construction, voir : *T. de N.*, p. 315.

Fig. 140.



Poussée des terres
Angle de frottement des terres sur elles-mêmes
Angle de frottement des terres sur la maçonnerie
Angle de frottement des terres sur elles-mêmes
Poussée des terres
Densité des terres
Hauteur du mur de Soutènement
Densité des terres

a fait subir un tel déplacement à une partie de l'échelle de la poussée P, fractionnée au point P = 5, en vue de réduire les dimensions du nomogramme.

La position des index, marquée en pointillé, correspond au cas numérique pour lequel on a

$$\varpi = 2^{\mathrm{T}}, \qquad H = 4^{\mathrm{m}},5,$$
$$\varphi = 30°, \qquad \varphi_1 = 35°.$$

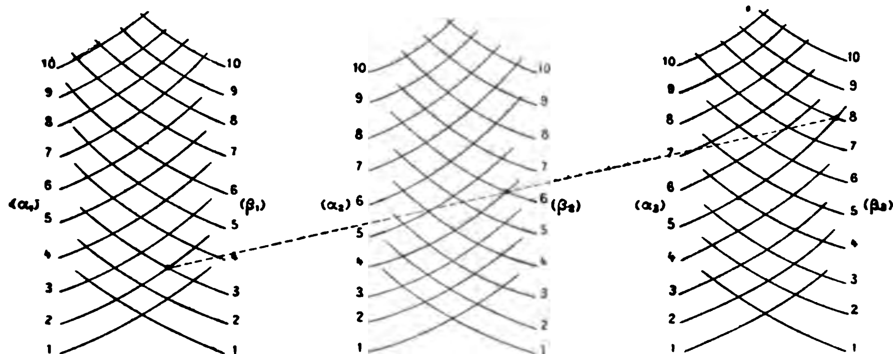
L'abaque donne

$$P = 5^{\mathrm{T}},87.$$

110. *Points à deux cotes.* — On obtient un mode d'extension plus général du nombre des variables en substituant à des systèmes de points à une cote, distribués sur des supports quelconques, des *systèmes de points à deux cotes,* c'est-à-dire des réseaux de courbes à l'intérieur desquels chaque point est considéré comme muni des cotes des deux courbes qui s'y rencontrent.

Si, par exemple, dans les fonctions f_1, φ_1, ψ_1, f_2, φ_2, ψ_2, f_3, φ_3, ψ_3, qui ont servi à définir le type général des nomogrammes à points alignés, on suppose qu'il entre respectivement, au lieu des variables uniques α_1, α_2, α_3, des couples de variables α_1 et β_1, α_2 et β_2, α_3 et β_3, on obtient le type de nomogramme à six variables représenté schématiquement par la figure 141.

Fig. 141.



Un type, très fréquent dans les applications, d'équations à quatre variables est celui qui s'obtient en remplaçant dans le type $(E)_2$ ci-dessus les fonctions f_3, φ_3, ψ_3 d'une seule variable α_3 par des fonctions de deux variables α_3 et β_3. Les équations $[\alpha_1]_2$, $[\alpha_2]_2$, $[\alpha_3]_2$,

Fig. 142.

Echelle de p

Echelle de q

Echelle de z

Echelle de n

Nota. — *Les cotes de z inscrites sur l'axe horizontal sont répétées pour les valeurs comprises entre 4,5 et 10 sur les courbes (n) cotées de (-6) à (-10), à l'intersection de celles-ci et des verticales correspondantes.*

données plus haut serviront encore à définir le nomogramme, seulement les deux dernières, contenant alors α_3 et β_3, seront désignées par $[\alpha_3, \beta_3]_2$. Elles définiront le réseau (α_3, β_3), et, pour avoir séparément les courbes (α_3) et (β_3) de ce réseau, il faudra, entre ces deux équations, éliminer successivement β_3 et α_3.

Soit, comme exemple, l'équation complète du troisième degré

$$z^3 + nz^2 + pz + q = 0.$$

On voit qu'elle rentre dans le type précédent lorsqu'on prend

$$\alpha_1 \equiv p, \qquad \alpha_2 \equiv q, \qquad \alpha_3 \equiv n, \qquad \alpha_4 \equiv z.$$

Les équations définissant le nomogramme seront donc

$[p]$	$x = -l,$	$y = p,$
$[q]$	$x = l,$	$y = q,$
$[n, z]$	$x = l\dfrac{1-z}{1+z},$	$y = -\dfrac{z^3+nz^2}{1+z}.$

D'ailleurs la première des équations $[n, z]$ ne contenant pas n, on voit que les lignes (z) sont des parallèles à Oy. Si l'on se borne aux valeurs positives de z, on obtient ainsi le nomogramme représenté par la figure 142 ([1]) dont le mode d'emploi est le suivant : *Les racines z sont les cotes des parallèles à Oy passant par les points de rencontre de la courbe (n) avec la droite joignant le point (p) au point (q).*

Les positions de l'index, marquées en pointillé, se rapportent respectivement aux équations

$$z^3 + 2z - 6 = 0,$$
$$z^3 + z^2 - 2{,}16z - 3{,}2 = 0,$$

pour lesquelles le nomogramme donne $z = 1{,}46$ et $z = 1{,}6$.

111. *Double alignement.* — Indépendamment de l'introduction des éléments à plus d'une cote, on parvient encore à représenter des équations à plus de trois variables en ayant recours à d'autres modes de combinaison entre éléments à une seule cote.

([1]) Pour la construction de ce nomogramme, voir : *T. de N.*, p. 133. Disons à ce propos qu'à cet endroit les indices 1 et 2 de la lettre l doivent etre permutés entre les formules (p) et (q), ce qui, d'ailleurs, a été sans importance pour la construction, puisqu'on a pris $l_1 = l_2$.

En raison du nombre des occasions qui s'offrent de l'appliquer, nous citerons le procédé du *double alignement* [1] qui, borné au cas le plus ordinaire de la pratique, peut s'énoncer ainsi :

Si l'équation à quatre variables peut se mettre sous la forme

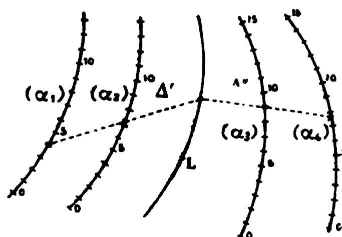
$$F(\alpha_1, \alpha_2) = \Phi(\alpha_3, \alpha_4),$$

et si chacune des équations

$$\alpha = F(\alpha_1, \alpha_2),$$
$$\alpha = \Phi(\alpha_3, \alpha_4),$$

α étant une variable auxiliaire, est représentable par un nomogramme à points alignés, *l'échelle α étant la même sur ces deux nomogrammes,* il suffira d'accoler ces deux nomogrammes par cette échelle (α) commune pour avoir un nomogramme de l'équation à quatre variables, dont le mode d'emploi résultera de l'énoncé suivant (*fig.* 143) : *la droite joignant les points* (α_1) *et* (α_2) *et la droite*

Fig. 143.



joignant les points (α_3) *et* (α_4) *se coupent sur le support* L *de l'échelle* (α), *qui est dit la ligne de pivot.*

Dans la pratique cette ligne de pivot est d'ailleurs presque toujours une ligne droite.

On peut alors mettre l'équation correspondante sous une forme très simple qui a été remarquée par M. Soreau (*loc. cit.*) : si la ligne de pivots rectiligne est considérée comme une ligne de terre, les deux positions de l'index peuvent être prises pour les traces d'un même plan. Dès lors les quatre points cotés, deux à deux situés sur ces traces, sont dans un même plan. Or, si, la ligne de terre étant prise pour axe

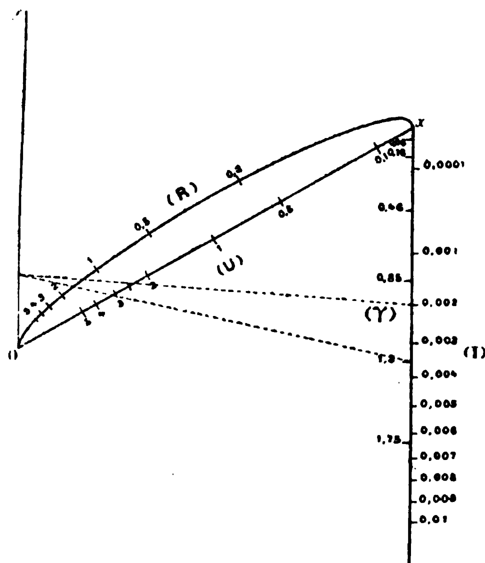
---

[1] La théorie générale du double alignement se trouve dans le *T. de N.* (Chap. III, Section V) et dans *E. S.*, p. 54.

des x, on prend respectivement dans chacun des plans de projection un axe des y et un axe des z, les quatre points peuvent être définis (en coordonnées homogènes) par les équations

$$(\alpha_1) \qquad x = f_1, \quad y = \varphi_1, \quad z = 0, \quad t = \psi_1,$$
$$(\alpha_2) \qquad x = f_2, \quad y = \varphi_2, \quad z = 0, \quad t = \psi_2,$$
$$(\alpha_3) \qquad x = f_3, \quad y = 0, \quad z = \varphi_3, \quad t = \psi_3,$$
$$(\alpha_4) \qquad x = f_4, \quad y = 0, \quad z = \varphi_4, \quad t = \psi_4,$$

Fig. 144.



et l'équation qui exprime qu'ils sont dans un même plan s'écrit

$$\begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & 0 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & 0 & \psi_2 \\ f_3 & 0 & \varphi_3 & \psi_3 \\ f_4 & 0 & \varphi_4 & \psi_4 \end{vmatrix} = 0.$$

La forme particulière que prend le plus fréquemment cette équation est d'ailleurs la suivante :

$$f_1 \varphi_2 + f_2 = f_3 \varphi_4 + f_4.$$

On la représente, en prenant la ligne des pivots comme axe des y,

au moyen des systèmes de points cotés

$$(\alpha_1) \qquad x = 1, \qquad y = -f_1,$$

$$(\alpha_2) \qquad x = \frac{\varphi_2}{\varphi_2 + 1}, \qquad y = \frac{f_2}{\varphi_2 + 1},$$

$$(\alpha_3) \qquad x = 1, \qquad y = -f_3,$$

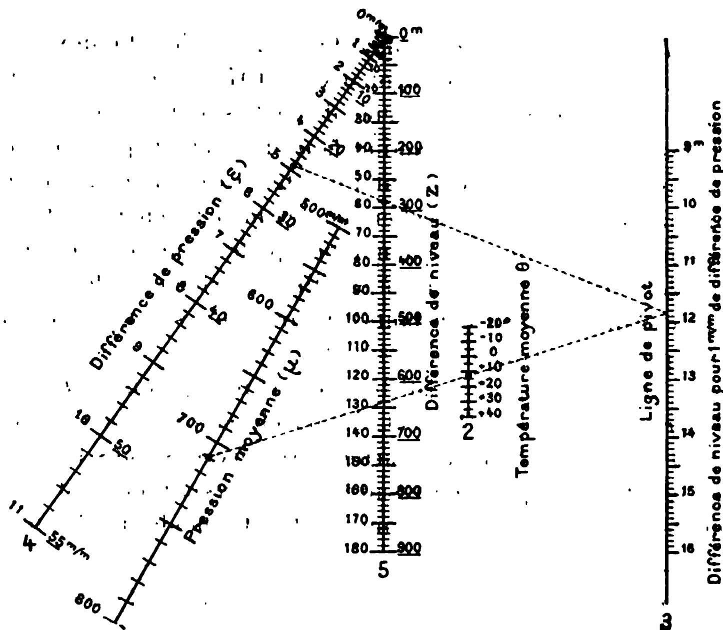
$$(\alpha_4) \qquad x = \frac{\varphi_4}{\varphi_4 + 1}, \qquad y = \frac{f_4}{\varphi_4 + 1}.$$

Voici, comme exemple (*fig.* 144), le nomogramme d'une équation donnée par M. Bazin pour l'écoulement de l'eau dans les canaux [1] :

$$\frac{\gamma}{R} + \frac{1}{\sqrt{R}} = \frac{87\sqrt{I}}{U},$$

où U est la vitesse moyenne, R le rayon moyen, I la pente, γ un coefficient qui dépend de la nature de la paroi.

Fig. 145.



Voici d'autre part (*fig.* 145) le nomogramme construit par

(1) Voir : *T. de N.*, p. 231.

M. Prévot, d'après la même méthode, pour la formule du nivellement barométrique (n° 55) lorsqu'elle a été mise sous la forme

$$\frac{Z}{\varepsilon} = \frac{8000 + 32\theta}{\mu},$$

Z désignant la différence de niveau entre les deux stations,
ε la différence $h - h'$ des pressions observées en ces deux stations,
μ la moyenne $\frac{h+h'}{2}$ de ces pressions,
θ la moyenne $\frac{t+t'}{2}$ des températures.

Les positions de l'index, marquées en pointillé (¹), correspondent à l'exemple numérique pour lequel on a

$$\varepsilon = 24^{mm},3, \qquad \mu = 710^{mm},4, \qquad \theta = 13°,6.$$

Le nomogramme donne

$$Z = 288^{m}.$$

112. *Idée de la théorie générale.* — L'emploi d'index mobiles [comme dans les abaques hexagonaux (n° **107**), ou les nomogrammes à alignement (n° **108**)], voire même d'échelles mobiles [comme dans les règles à calcul qui, abstraction faite de leurs dispositions matérielles, appartiennent exactement à la catégorie des nomogrammes (²)] devait faire naître l'idée de rechercher les modes généraux de représentation des équations à un nombre quelconque de variables, au moyen des relations de position à établir entre éléments, les uns cotés, les autres sans cote (ou constants), figurés soit sur un même plan, soit sur plusieurs plans superposés (³).

Cette théorie générale a d'abord été exposée dans le *Traité de Nomographie* (Chap. VI, Sect. I), où elle apparaît comme la synthèse de toutes les méthodes particulières décrites dans le corps de l'Ouvrage. Elle comporte nécessairement un certain mode de classification de toutes les méthodes concevables. Ce mode de classification

(¹) Il faut remarquer qu'il y a deux échelles (z) accolées, ainsi que deux échelles (ε). L'échelle (z) de 0 à 180 correspond à l'échelle (ε) de 0 à 11, l'échelle (z) de 0 à 900, à l'échelle ε de 0 à 55. Pour le détail de la construction, voir : *T. de N.*, p. 228.

(²) *T. de N.*, p. 357.

(³) Un élément mobile peut toujours être considéré comme faisant corps avec un plan mobile glissant sur celui où figurent les éléments pris comme fixes.

repose, à l'endroit cité (¹), sur la double considération du nombre des plans superposés intervenant dans le type de nomogramme considéré et du nombre des variables en présence. Dans l'*Exposé synthétique*, le problème général est abordé directement, et tous les types possibles de nomogrammes sont ramenés, par la seule considération du mode de répartition des éléments constants (c'est-à-dire sans cote), à *vingt types canoniques* dont un à un seul plan et dix-neuf à deux plans superposés (²).

Il serait superflu de reprendre ici le détail de cette théorie générale (³). Au moins avons-nous tenu à en signaler l'existence au lecteur que le sujet peut intéresser.

(¹) *T. de N.*, p. 399.

(²) *E. S.*, p. 35.

(³) On en trouvera un exposé élémentaire dans le *Compte rendu du Congrès de l'A. F. A. S.* tenu à Angers en 1903 (p. 180).

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE II. — Planimétrie.

I. — Mesure des angles.

II. — Mesure des distances.

III. — Méthodes générales de la Planimétrie.

CHAPITRE III. — ALTIMÉTRIE.

I. — Instruments et méthodes.

II. — Notions sur le Nivellement général de la France (N. G. F.).

CHAPITRE IV. — THÉORIE GÉNÉRALE DES RACCORDEMENTS.

I. — Raccordements circulaires.

II. — Raccordements à courbure progressive.

SECONDE PARTIE,

CUBATURE DES TERRASSES.

CHAPITRE V. — Cubature proprement dite.

I. — Évaluation des volumes et surfaces des terrasses.

II. — Évaluation des éléments des profils en travers.

A. — *Procédés mécaniques.*

B. — *Procédés géométriques.*

C. — *Procédé algébrique.*

D. — *Procédés nomographiques.*

